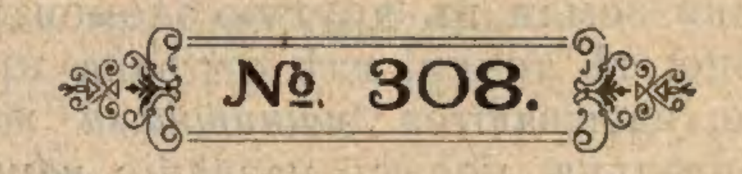
XXVI Сем. № 8.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

Элементарной Математики.

15 Ноября  № 308. 1901 г.

Варіаціи земного магнитизма.

† *Привать-Доцента П. Пассальскаго въ Одессѣ* *).

Предварительныя опредѣленія. Если возьмемъ намагниченный стержень (стрѣлку), который могъ бы свободно вращаться во всѣ стороны около своего центра тяжести, то онъ, подъ вліяніемъ магнитной силы земли, приметъ вполнѣ опредѣленное положеніе равновѣсія. Обыкновенно такая стрѣлка не будетъ горизонтальной и въ нашемъ полушаріи сѣверный конецъ ея опускается внизъ.

Вертикальная плоскость, проходящая чрезъ стрѣлку, носитъ названіе *магнитнаго меридіана.* Уголъ, образуемый послѣднимъ съ географическимъ меридіаномъ, называется *склоненіемъ;* другими словами, склоненіе есть уголъ между направленіемъ стрѣлки компаса и полуденной линіей. Склоненіе считается положительнымъ, если сѣверный конецъ стрѣлки обращенъ къ западу.

*) Настоящую статью покойный П. Т. Пассальскій писалъ для нашего журнала по просьбѣ редакціи. Скоропостижная смерть прервала эту работу. Приватъ-доцентъ Б. П. Вейнбергъ, взявшій на себя трудъ разобраться въ бумагахъ покойнаго, нашелъ и передалъ намъ эту рукопись. Хотя статья и не закончена, но и въ настоящемъ видѣ она очень интересна.

Уголъ, образуемый свободно подвѣшенной стрѣлкой съ горизонтальной плоскостью, называется *наклоненіемъ* и считается положительнымъ, если сѣверный конецъ наклоненъ внизъ.

Если въ магнитномъ полѣ земли помѣстить массу + 1, то на нее будетъ дѣйствовать сила въ направленіи стрѣлки, называемая *полнымъ напряженіемъ* земного магнитизма; эту силу можно разложить на двѣ: вертикальную и горизонтальную, а послѣднюю на сѣверную и западную.

Склоненіе, наклоненіе и горизонтальное напряженіе носятъ обыкновенно названіе *элементовъ* магнитизма земли. При переходѣ изъ одной точки земли въ другую элементы измѣняются—и довольно неправильно; тѣ точки, гдѣ стрѣлка принимаетъ вертикальное направленіе, называются *магнитными полюсами*, а линія, гдѣ стрѣлка горизонтальна, носитъ названіе *магнитнаго экватора*.

Но элементы измѣняются не только при перемѣщеніи по земной поверхности, но даже въ одномъ и томъ же пунктѣ: стрѣлка испытываетъ непрерывныя колебанія — періодическія и непеpiодическія, называемыя *варіаціями земного магнитизма*.

При помощи спеціальныхъ приборовъ есть возможность опредѣлять значеніе элементовъ для каждаго момента. Среднее изъ 24-хъ значеній элемента для каждаго часа сутокъ называется *дневнымъ* значеніемъ элемента; среднее изъ дневныхъ среднихъ для каждаго дня мѣсяца называется *мѣсячнымъ* и среднее 12-ти мѣсячныхъ—*годичнымъ* значеніемъ элемента.

Послѣ этихъ необходимыхъ замѣчаній перейдемъ къ разсмотрѣнію варіацій магнитизма.

Вѣковыя варіаціи. Если опредѣлить въ теченіе нѣсколькихъ лѣтъ годичное значеніе элемента въ какомъ либо пунктѣ, то увидимъ, что оно измѣняется изъ года въ годъ и часто весьма значительно. Такъ въ Парижѣ въ 1580 году склоненіе было равно — 11,5. Послѣ этого стрѣлка склоненія медленно возвращалась къ направленію географическаго меридіана и спустя сто лѣтъ совпала съ послѣднимъ. Движеніе ея въ томъ же направленіи продолжалось до начала настоящаго столѣтія, когда стрѣлка была отклонена отъ полуденной линіи на 22° къ западу. Затѣмъ началось медленное движеніе назадъ къ востоку, продолжающееся и въ настоящее время. Такимъ образомъ стрѣлка еще ни разу не возвращалась къ положенію, которое наблюдалось триста лѣтъ тому назадъ и, слѣдовательно, мы не имѣемъ даже одного полнаго періода вѣковыхъ варіацій склоненія и поэтому не знаемъ, будетъ ли стрѣлка по прежнему двигаться непрерывно къ своему крайнему восточному положенію или же это положеніе будетъ достигнуто послѣ нѣсколькихъ болѣе или менѣе значительныхъ колебаній или, наконецъ, стрѣлка никогда не вернется назадъ и такимъ образомъ вѣковыя колебанія окажутся непеpiодическими. Обыкновенно же вѣковыя варіаціи принято считать

періодическими и даже вычислять формулы, представляющія ходъ того или другого элемента, въ зависимости отъ времени. Такъ напримѣръ, по Bauer'у ходъ склоненія и наклоненія для Лондона очень хорошо передеатся соотвѣтственно формулами

$$6^{0}.24 + 17^{0}.7 \sin [0.7 (t - 1850) + 112^{0}.7]$$
$$70^{0}.40 - 3^{0}.98 \sin [0.7 (t - 1850) + 23^{0}.0],$$

гдѣ t означаетъ годъ, для котораго ищется склоненіе или наклоненіе.

Для различныхъ пунктовъ земли вѣковыя измѣненія очень различны; такъ въ среднемъ между 1858—1890 годами годичное измѣненіе склоненія въ Европѣ было:

Эдинбургъ	—9′.1
Утрехтъ	—8.2
Амьенъ, Берлинъ, Гамбургъ, Парижъ .	—7.4
Бордо	—7.0
Краковъ, Прага, Зальцбургъ	—6.6
Петербургъ	—6.0
Керчь, Одесса	—5.2
Москва	—4.9.

Даже въ одномъ и томъ же пунктѣ въ раличные годы вѣковое измѣненіе не одинаково. Такъ оно для Гамбурга было:

Въ 1856 году	—8′.4
„ 1865 „	—8.0
„ 1880 „	—7.0
„ 1885 „ . , ...	—6.4
„ 1890 „	—5.2.

Если обратимся къ движенію свободно подвѣшенной стрѣлки, то по вычисленіямъ Bauer'a оказывается, что если смотрѣть изъ центра стрѣлки на ея сѣверный полюсъ, то онъ будетъ двигаться въ пространствѣ по часовой стрѣлкѣ. Однако, по послѣднимъ изслѣдованіямъ H. Fritsche, опредѣлившаго движеніе сѣвернаго конца между 1600 и 1885 годами для 804 пунктовъ, правильно разсѣянныхъ по всему земному шару, движеніе только въ 63-хъ случаяхъ происходитъ по часовой стрѣлкѣ, въ остальныхъ же случаяхъ или въ противоположномъ направленіи или же такъ, что направленіе не можетъ быть причислено ни къ тѣмъ ни къ другимъ.

Въ общемъ вѣковыя варіаціи происходятъ такъ, какъ если-бы магнитные полюсы земли обращались вокругъ географическихъ отъ востока къ западу. И дѣйствительно, вычисленія, сути которыхъ мы не можемъ касаться здѣсь, и магнитныя карты по-

казываютъ, что магнитные полюсы испытываютъ перемѣщенія; такъ положеніе полюсовъ въ различныя эпохи было:

Сѣверный.

Годъ.	Широта.	Долгота.	Авторитетъ.
1700	75° N	116° W	Halley.
1770	66°	104°	Hausteen.
1823	68°	97°	Barlon.
1825	71°	98°	Duperrey.
1888	71°	98°	Neumayer.
1895	70°	97°	Англійскія морскія карты.

Южный.

Годъ.	Широта.	Долгота.	Авторитетъ.
1825	76° S	136° E	Duperrey.
1885	74°	145°	Neumayer.
1895	73°	147°	Англійскія карты.

Насколько можно судить по приведеннымъ числамъ, движеніе полюсовъ неравномѣрно и не происходитъ по параллелямъ и поэтому-то невозможно предсказать, пойдутъ ли полюсы послѣ полнаго оборота вокругъ географическихъ по прежнему пути, или нѣтъ; весьма возможно, что путь ихъ имѣетъ колебанія и даже петли.

Что касается продолжительности обращенія магнитныхъ полюсовъ около географическихъ, то различные изслѣдователи приходятъ къ самымъ несогласнымъ выводамъ; такъ Parker для періода обращенія находитъ 640 лѣтъ, Seeland—458, Wilde—960, а Bauer даже около 2000 лѣтъ!

Не было недостатка въ гипотезахъ о причинахъ вѣковыхъ измѣненій, но однѣ изъ нихъ маловѣроятны и даже фантастичны, другія же требуютъ сопоставленія съ различными иными факторами, сопоставленія еще не сдѣланнаго,—и поэтому до сихъ поръ нѣтъ достаточно обоснованнаго объясненія этихъ варіацій. Ограничимся здѣсь только изложеніемъ главнѣйшихъ гипотезъ, не входя въ критическое ихъ обсужденіе, что далеко вывело бы насъ изъ предѣловъ настоящей статьи.

Halley допускаетъ, что земля состоитъ изъ двухъ частей: одна изъ нихъ — твердая кора, отдѣленная отъ второй части — внутренняго твердаго же шара. Какъ оболочка, такъ и шаръ намагничены и ихъ магнитныя оси не совпадаютъ. Каждая изъ этихъ частей имѣетъ независимое движеніе и такъ какъ магнитная ось шара наклонена къ географической, то на поверхности земли и наблюдаютъ перемѣщенія магнитныхъ полюсовъ. Hausteen объясняетъ весь магнитизмъ земли системой 2-хъ сѣверныхъ и 2-хъ южныхъ полюсовъ и находитъ, что вѣковыя измѣненія могутъ быть вызваны относительнымъ измѣненіемъ въ положеніи

этихъ полюсовъ, но не даетъ физическаго объясненія какъ существованія, такъ и перемѣщенія этой магнитной системы. Sabine приписываетъ происхожденіе одной части системы земнымъ причинамъ, происхожденіе же другой—космическимъ, дѣйствующимъ на землю индукціей. Постепенное передвиженіе второй части и вызываетъ вѣковыя варіаціи. Parker единственнымъ источникомъ силы магнитнаго притяженія на землѣ считаетъ вращеніе всей нашей солнечной системы вокругъ отдаленнаго и неизвѣстнаго мірового центра. Магнитный полюсъ долженъ вращаться вокругъ географическаго одновременно съ землей; изъ періода въ 640 лѣтъ онъ заключаетъ, что и солнце вмѣстѣ со всѣми планетами совершаетъ оборотъ около неизвѣстнаго тѣла въ тотъ же промежутокъ времени. Duponchel вѣковыя варіаціи приписываетъ новой планетѣ, движущейся за Нептуномъ и даже даетъ ей названіе „Океанъ“! Schulze обращается къ нѣдрамъ земли. За твердой корой земли слѣдуетъ полужидкій раскаленный слой, затѣмъ слой огненно-жидкій и наконецъ ядро, полутвердое вслѣдствіе чрезвычайно сильнаго давленія. Послѣднее и служитъ сѣдалищемъ земного магнитизма. Ядро должно имѣть форму слегка вытянутаго эллипсоида вращенія, ось котораго наклонена къ земной на уголъ около 20^0. Ея величина—четверть земного діаметра. Меридіональная плоскость, проведенная черезъ ось ядра вращается въ 604 года, чѣмъ и объясняется передвиженіе магнитныхъ полюсовъ. По Lagrange'у солнце дѣйствуетъ во внѣшнемъ пространствѣ, какъ магнитъ, при чемъ его магнитная ось, вѣроятно, совпадаетъ съ осью вращенія. Въ магнитномъ полѣ солнца вращается земля и ея ось намагниченія вслѣдствіе этого испытываетъ медленное и постепенное измѣненіе положенія. Schuster предполагаетъ, что мировое пространство можетъ быть проводникомъ для электричества; вращеніе въ немъ земного магнита, ось котораго не совпадаетъ съ осью вращенія, должно вызвать въ пространствѣ наведенные электрическіе токи, а эти въ свою очередь дѣйствуютъ на земной магнитизмъ, а именно вращаютъ магнитную ось около географической. Fritsche объясняетъ варіаціи теплотой. Какъ извѣстно, при нагрѣваніи тѣла его магнитизмъ уменьшается, при охлажденіи—увеличивается. Если температура почвы подъ вліяніемъ климатическихъ условій измѣняется, то должно измѣняться и распредѣленіе магнитизма земли. Если эта гипотеза справедлива, то по Fritsche область съ низкой температурой почвы въ сѣверной Америкѣ въ теченіе трехъ послѣднихъ столѣтій должна была передвигаться отъ сѣверо-запада на юго-востокъ, а въ южномъ полушаріи въ обратномъ направленіи—отъ юго-востока къ сѣверо-западу.

(Продолженіе слѣдуетъ).

Этюды по основаніямъ геометріи.

Приватъ-Доцента В. Кагана въ Одессѣ.

Два года тому назадъ появилось замѣчательное сочиненіе, посвященное основаніямъ геометріи и принадлежащее сравнительно еще молодому нѣмецкому математику, профессору Геттингенскаго университета *D. Hilbert'у*. Въ этомъ сочиненіи Hilbert предлагаетъ систему независимыхъ посылокъ, исходя изъ которыхъ, по его утвержденію, возможно построить чисто формально систему евклидовой геометріи *). Авторъ не развиваетъ съ достаточной подробностью ни доказательства независимости этихъ посылокъ, ни самой системы. Онъ намѣчаетъ только ходъ того и другого изслѣдованія. Но съ другой стороны, онъ намѣчаетъ также геометрическую систему, независящую отъ одного изъ основныхъ положеній нашей обыкновенной геометріи—отъ постулата Архимеда. Слѣдуя идеѣ Veroneze, онъ старается построить геометрію *неархимедову* (Nicht-Archimedische Geometrie) подобно тому, какъ Лобачевскій построилъ геометрію неевклидову.

Сочиненіе D. Hilbert'a встрѣчено въ Европѣ съ живѣйшимъ одобреніемъ. Всѣ отзывы сходятся на томъ, что это первое сочиненіе, рѣшающее завѣтную задачу элементарной геометріи—дать систему независимыхъ другъ отъ друга посылокъ, достаточныхъ для построенія неевклидовой геометріи.

Такъ ли это или нѣтъ, это вопросъ, который еще предстоитъ рѣшить научной критикѣ. Во всякомъ случаѣ отвѣтить на этотъ вопросъ утвердительно возможно будетъ только тогда, когда всѣ указанныя Hilbert'омъ вычисленія, необходимыя для доказательства независимости его посылокъ, будутъ выполнены и когда будетъ построена евклидова геометрія, согласно его указаніямъ **). Но какъ бы ни былъ рѣшенъ этотъ вопросъ, не подлежитъ сомнѣнію, что сочиненіе Hilbert'a представляетъ собой классическую работу, далеко оставляющую за собой все, что было сдѣлано до сихъ поръ въ смыслѣ построенія цѣльной геометрической системы; что эта книга объединяетъ и дополняетъ многія идеи, разновременно высказанныя раньше; что она содержитъ много оригинальныхъ и интересныхъ идей и сыграетъ важную роль въ дѣлѣ обоснованія системы евклидовой геометріи.

Редакція „Вѣстника Опытной Физики" давно желала познакомить своихъ читателей съ этимъ сочиненіемъ. Но сдѣлать это не такъ легко. Авторъ излагаетъ свои идеи въ такой формѣ, что

---

*) *D. Hilbert*. „Grundlagen der Geometrie". Сочиненіе появилось сначала въ юбилейномъ сборникѣ „Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals in Göttingen", а затѣмъ вышло отдѣльнымъ изданіемъ. Сочиненіе это переведено уже и на французскій языкъ.

**) Авторъ настоящихъ очерковъ полагаетъ, что изъ посылокъ Hilbert'a нельзя развить геометріи Евклида во всемъ ея объемѣ. Въ сочиненіи объ основаніяхъ геометріи, которое онъ въ настоящее время готовитъ, вопросъ этотъ будетъ разобранъ обстоятельно.

онѣ доступны только спеціалисту, привыкшему разбираться въ вопросахъ этого рода. Помѣстить переводъ статьи Hilbert'а казалось намъ поэтому мало цѣлесообразнымъ. Обстоятельное же изложеніе и обработка его идей въ доступномъ изложеніи требуетъ большого труда.

Считая однако необходимымъ познакомить читателей „Вѣстника" съ такимъ выдающимся сочиненіемъ, мы рѣшили написать рядъ этюдовъ, изъ которыхъ каждый представлялъ бы собой болѣе или менѣе законченный очеркъ одного изъ вопросовъ, относящихся къ основаніямъ геометріи и содержалъ бы сопоставленіе постановки этого вопроса у Hilbert'а и у другихъ авторовъ. Быть можетъ, послѣ нѣсколькихъ такихъ этюдовъ намъ и удастся дать общій очеркъ системы Hilbert'а.

Что касается выбора матеріала, то мы не будемъ слѣдовать тому порядку идей, котораго придерживается Hilbert. Напротивъ того, мы удѣлимъ нѣкоторое мѣсто и такимъ идеямъ, которыхъ Hilbert *) вовсе не касается. Мы начнемъ съ вопросовъ наиболѣе простыхъ и отъ нихъ перейдемъ къ принципу Архимеда,— составляющему краеугольный камень работы Hilbert'а.

I.

Измѣреніе длины прямолинейныхъ отрѣзковъ и площадей прямолинейныхъ фигуръ.

§ 1. Все развитіе ученія объ основаніяхъ геометріи сводится къ тому, чтобы освободить систему геометріи отъ тѣхъ многочисленныхъ, неясныхъ, ничего не выражающихъ представленій, которыми изобиловало изложеніе этой дисциплины въ прежнія времена. Представленія эти время отъ времени мѣнялись; длина безъ ширины, однородное расположеніе точекъ на прямой линіи, наклоненіе прямыхъ другъ къ другу, фигурировавшія у Евклида, смѣнились представленіями объ однородномъ и непрерывномъ пространствѣ и трехъ его измѣреніяхъ, представленіями столь же неясными, столь же мало пригодными для формальной науки. Возможно, что съ этими представленіями связаны болѣе или менѣе ясные, реальные образы; но по отношенію къ формальной геометріи вопросъ стоитъ иначе.

Каждый формальный выводъ можетъ быть сдѣланъ только изъ такихъ посылокъ, которыя имѣютъ вполнѣ опредѣленное содержаніе, находящееся въ связи съ трактуемымъ вопросомъ. Если поэтому мы вводимъ въ формальную систему тѣ или иныя представленія, то относительно нихъ возникаетъ такая дилемма: либо мы имѣемъ возможность опредѣленно установить тѣ ихъ свойства, къ которымъ мы будемъ аппелировать, — тогда совокупность этихъ свойствъ и составляетъ формальное опредѣленіе образа; либо мы не имѣемъ возможности этого сдѣлать, — тогда мы не можемъ и воспользоваться этими представленіями нашей системы; введеніе ихъ въ геометрію представляетъ собой иллюзію, самообманъ; поэтому именно формальная наука старается

*) Нѣкоторыя изъ нихъ проведены у автора въ сочиненіи, которое онъ въ настоящее время готовитъ.

отъ такихъ представленій освободиться, старается опираться только на такія опредѣленія и положенія, содержаніе которыхъ строго установлено.

Къ числу такихъ неясныхъ представленій относится процессъ измѣренія. Еще не такъ давно въ сочиненіяхъ по геометріи совершенно игнорировался вопросъ о томъ, что собственно значитъ измѣрить ту или другую величину. Принималось, что существуютъ образы, которые мы называемъ длиной, площадью, объемомъ—и геометрія имѣетъ задачей только указаніе способа, какъ эти величины выразить въ числахъ. Геометръ какъ будто забывалъ, что это понятія, имъ самимъ созданныя, что это — термины, которые тогда только получатъ опредѣленное содержаніе, когда онъ самъ имъ это содержаніе сообщитъ, когда онъ самъ въ нихъ это содержаніе вложитъ.

Въ настоящее время эта точка зрѣнія пріобрѣтаетъ уже такое распространеніе, что трудно указать новый учебникъ элементарной геометріи, на которомъ она бы не отразилась. Такъ напримѣръ, авторы всѣхъ новыхъ сочиненій по элементарной геометріи стараются установить понятіе о длинѣ прямолинейнаго отрѣзка и кривой линіи. Если изъ этихъ опредѣленій и не всегда выводятся всѣ тѣ свойства длины, къ которымъ приходится потомъ аппелировать, то часто это дѣлается только изъ дидактическихъ, а не теоретическихъ соображеній.

Выяснить общую идею объ измѣреніи геометрическихъ образовъ и въ частности разсмотрѣть подробно вопросъ объ измѣреніи длинъ прямолинейныхъ отрѣзковъ и площадей прямолинейныхъ фигуръ составитъ предметъ настоящаго очерка. Мы покажемъ прежде всего, какъ обосновывается понятіе о длинѣ прямолинейнаго отрѣзка.

§ 2. Эта теорія опирается на слѣдующія положенія.

Опредѣленіе 1. Если на прямолинейномъ отрѣзкѣ A_0A_n расположены точки

$$A_1, A_2, A_3, \dots A_{n-1}$$

послѣдовательно, т. е. такъ, что каждая точка A_i лежитъ между точками A_{i-1} и A_{i+1}, то говорятъ, что отрѣзокъ A_0A_n составленъ изъ отрѣзковъ A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3 . . . . $A_{n-1}A_n$, или что отрѣзокъ A_0A_n представляетъ собой сумму отрѣзковъ A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3 . . . . $A_{n-1}A_n$,—и выражаютъ это равенствомъ:

$$A_0A_n = A_0A_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{n-1}A_n.$$

Опредѣленіе 2. Если отрѣзокъ AC состоитъ изъ отрѣзковъ AB и BC, то говорятъ, что отрѣзокъ AC больше, нежели отрѣзокъ AB, а отрѣзокъ AB меньше, нежели отрѣзокъ AC.

Предложеніе 1. Если отрѣзокъ A_0A_n состоитъ изъ отрѣзковъ A_0A_1, A_1A_2 . . . . $A_{n-1}A_n$, то онъ можетъ быть составленъ изъ тѣхъ же отрѣзковъ, расположенныхъ въ любомъ другомъ порядкѣ; и обратно, всякій отрѣзокъ, составленный изъ отрѣзковъ A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3 . . . . $A_{n-1}A_n$, расположенныхъ въ какомъ угодно порядкѣ, равенъ отрѣзку A_0A_n.

Предложеніе 2. Если отрѣзокъ A_0A_n состоитъ изъ названныхъ выше отрѣзковъ, и мы разобьемъ эти послѣдніе на нѣсколько группъ, изъ отрѣзковъ каждой группы составимъ новый от-

рѣзокъ,—то отрѣзокъ, составленный изъ этихъ новыхъ отрѣзковъ, будетъ равенъ отрѣзку A_0A_n.

Предложенiе 3. Если $AB > CD$, а $CD \geqq EF$, то $AB > EF$. Если $AB < CD$ и $CD \leqq EF$, то $AB < EF$.

Опредѣленiе 3. Если отрѣзокъ AB состоитъ изъ m одинаковыхъ отрѣзковъ (Q), то говорятъ, что Q есть m-тая часть отрѣзка AB, и обозначаютъ это равенствомъ

$$AB = m.Q.$$

Предложенiе 4. Каждый отрѣзокъ можетъ быть однимъ и только однимъ способомъ раздѣленъ на m равныхъ частей. Устанавливаемая этимъ предложенiемъ однозначность этой операцiи имѣетъ тотъ смыслъ, что если мы произведемъ это дѣленiе различными способами, то разобьемъ нашъ отрѣзокъ на такiе же точно отрѣзки, какiе бы прiемы мы для этого ни употребляли.

Предложенiе 5. Положимъ, что отрѣзокъ $AB = m.Q$, а отрѣзокъ $CD = n.Q$. Если $AB = CD$, то $m = n$; если $AB > CD$, то $m > n$; если $AB < CD$, то $m < n$.

Обратно, если $m.AB > m.CD$, то $AB > CD$; если $m.AB = m.CD$, то $AB = CD$, если $m.AB < m.CD$, то $AB < CD$.

Предложенiе 6. Если мы равные (или неравные) отрѣзки повторимъ одинаковое число разъ, то получимъ равные (или соотвѣт. неравные) отрѣзки, т. е. если $AB = CD$, то $m.AB = m.CD$. Если $AB > CD$, то $m.AB > m.CD$.

Принципъ Архимеда: если на нѣкоторомъ отрѣзкѣ AB отложимъ меньшiй отрѣзокъ AA_1, затѣмъ равный ему отрѣзокъ A_1A_2 и т. д., то рано или поздно конечная точка откладываемаго отрѣзка A_{n+1} упадетъ на продолженiе отрѣзка AB въ сторону точки B.

Опредѣленiе 4. Если въ предыдущемъ процессѣ точка A_n еще принадлежитъ отрѣзку AB, а точка A_{n+1} падаетъ за предѣлы этого отрѣзка, то мы будемъ говорить, что отрѣзокъ AA_1 *содержится въ отрѣзкѣ AB n разъ.* Если отрѣзокъ AA_1 больше отрѣзка AB, то мы будемъ говорить, что отрѣзокъ AA_1 не содержится въ отрѣзкѣ AB ни разу (или содержится 0 разъ).

Перечисленныя здѣсь предложенiя могутъ быть безъ труда доказаны, хотя доказательство ихъ рѣдко приводится въ курсахъ геометрiи во всей полнотѣ. Предложенiя 1 и 2 извѣстны подъ названiемъ перемѣстительнаго и сочетательнаго закона; изъ нихъ собственно и выводятся остальныя предложенiя.

Принципъ Архимеда носитъ имя греческаго геометра, которымъ онъ былъ впервые высказанъ въ сочиненiи „О сферѣ и цилиндрѣ". О роли этого предложенiя въ геометрiи,—о томъ, принадлежитъ ли оно къ числу доказываемыхъ или недоказываемыхъ положенiй, мы будемъ имѣть случай подробно говорить ниже.

При помощи принципа Архимеда можно доказать слѣдующее важное для насъ предложенiе.

Предложенiе 6. Если отрѣзокъ Q больше отрѣзка R, то всегда можно найти такое цѣлое число n, что n-ая часть отрѣзка Q будетъ меньше отрѣзка R.

Доказательство. Положимъ, что отрѣзокъ R содержится въ отрѣзкѣ Q $(n-1)$ разъ. Тогда $nR > Q$. Если мы обозначимъ n-ую

часть отрѣзка Q черезъ q, то предыдущее неравенство можно будетъ представить въ такомъ видѣ: $nq < nR$. Отсюда, согласно предложенiю 5-му, слѣдуетъ, что $q < R$.

§ 3. Положимъ теперь, что мы имѣемъ два отрѣзка AB и CD. Выбравъ произвольно цѣлое число n, раздѣлимъ отрѣзокъ CD на n частей и пусть Q будетъ n-ая часть отрѣзка CD, такъ что $CD = n.Q$. Будемъ откладывать отрѣзокъ Q на отрѣзкѣ AB такъ, какъ это указано въ принципѣ Архимеда и положимъ, что отрѣзокъ Q содержится въ отрѣзкѣ AB m_n разъ (опр. 4); составимъ дробь $\frac{m_n}{n}$. Эта дробь называется приближеннымъ значенiемъ отношенiя отрѣзка AB къ отрѣзку CD съ точностью до $\frac{1}{n}$. Эту дробь мы будемъ обозначать знакомъ S_n.

Составимъ теперь рядъ:

$$S_1,\ S_2,\ S_3 \ldots\ldots S_n \ldots\ldots,$$

или иначе:

$$\frac{m_1}{1},\ \frac{m_2}{2},\ \frac{m_3}{3} \ldots\ldots \frac{m_n}{n} \ldots\ldots,$$

и покажемъ, что числа этого ряда стремятся къ опредѣленному предѣлу, когда указатель n неопредѣленно возрастаетъ. Съ этой цѣлью возьмемъ два члена изъ этого ряда: S_n и S_p, гдѣ $p > n$, и покажемъ, что абсолютная величина $S_p - S_n$ меньше $\frac{1}{n}$.

Число S_n, равное $\frac{m_n}{n}$, выражаетъ, что n-тая часть отрѣзка CD, которую мы обозначимъ черезъ Q, содержится въ отрѣзкѣ AB m_n разъ.

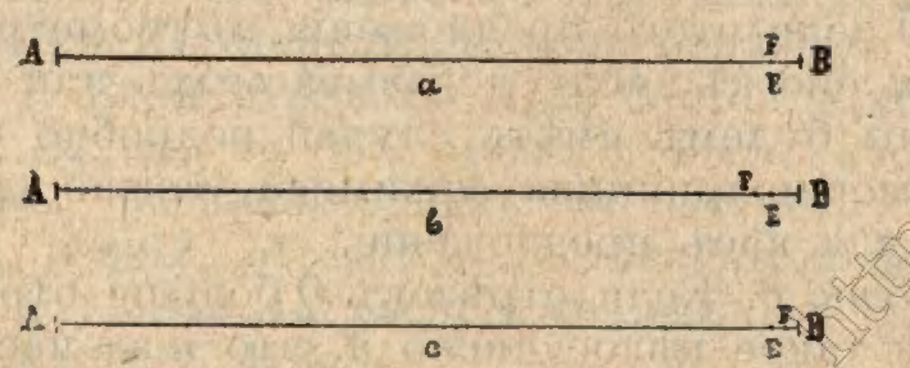
Откладывая отрѣзокъ Q на отрѣзкѣ AB, начиная отъ точки A, m_n разъ, мы дойдемъ до нѣкоторой точки E, которая либо совпадаетъ съ B, либо лежитъ между A и B; въ послѣднемъ случаѣ $EB < Q$. Во всякомъ случаѣ,

$$AE = m_n.Q,\quad CD = n.Q \ \ldots\ldots (1).$$

Такимъ же точно образомъ дробь $\frac{m_p}{p}$ показываетъ, что p-тая часть отрѣзка CD, которую мы обозначимъ черезъ R, содержится въ отрѣзкѣ AB m_p разъ Откладывая отрѣзокъ R на AB, начиная отъ точки A, m_p разъ, мы дойдемъ до нѣкоторой точки F. Тогда

$$AF = m_p.R,\quad CD = p.R \ \ldots\ldots (2).$$

Относительно положенiя точки F могутъ быть сдѣланы слѣдующiя предположенiя:



Фиг. 1.

1) Точка F совпадаетъ съ точкой E . . . (см. фиг. 1,a).

2) Точка F падаетъ до точки E, т. е. между A и E (см. фиг. 1,b).

3) Точка F падаетъ дальше точки E (см. фиг. 1,c).

Этотъ послѣдній случай можетъ представиться только тогда, когда точка E лежитъ между A и B, а точка F падаетъ либо между B и E, либо въ точку B. Мы разсмотримъ всѣ три случая по порядку.

Въ первомъ случаѣ

$AE = AF$, или [см. равенства (1) и (2)] $m_n Q = m_p R$

Умножая обѣ части этого равенства на pn (см. предл. 6), мы получимъ:

$$m_p np.R = m_n pn.Q,$$

откуда, на основаніи соотношеній (1) и (2), получаемъ:

$$m_p n.CD = m_n p.CD.$$

Согласно предложенію 5-му, отсюда вытекаетъ, что

$$m_p.n = m_n.p, \text{ т. е. } \frac{m_p}{p} = \frac{m_n}{n} \quad \ldots\ldots \quad \text{I.}$$

Во второмъ случаѣ, когда точка F падаетъ между A и E, $AE > AF$, т. е. $m_n Q > m_p R$.

Умножая обѣ части этого равенства на pn (предл. 6), мы получимъ:

$$m_n pn.Q > m_p np.R, \text{ т. е. } m_n p.CD > m_p n.CD, \ m_n p > m_p n,$$

$$\frac{m_n}{n} > \frac{m_p}{p} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{II.}$$

Съ другой стороны, въ этомъ случаѣ отрѣзокъ $FB < R$. Согласно предложенію 5-му $R < Q$, ибо по условію $p > n$. Стало быть, $FB < Q$. Такъ какъ отрѣзокъ FE не превышаетъ FB, то $FE < Q$. Слѣдовательно:

$$AE < AF + Q,$$

или иначе,

$$m_n Q < m_p R + Q.$$

Умножая обѣ части этого неравенства на pn, получимъ:

$$m_n pn.Q < m_p np.R + pn.Q,$$

или въ силу соотношеній (1) и (2)

$$m_n p.CD < (m_p n + p).CD.$$

Отсюда же, согласно предложенію 5-му, вытекаетъ, что

$$m_n p < m_p n + p,$$

и слѣдовательно, дѣля обѣ части неравенства на pn, получимъ:

$$\frac{m_n}{n} < \frac{m_p}{p} + \frac{1}{n}, \text{ т. е. } \frac{m_n}{n} - \frac{m_p}{p} < \frac{1}{n} \quad \ldots\ldots \quad \text{II'.}$$

Въ третьемъ случаѣ $AF > AE$. Отсюда соображеніями, вполнѣ аналогичными тѣмъ, посредствомъ которыхъ выведено неравенство II, мы обнаружимъ, что

$$\frac{m_p}{p} > \frac{m_n}{n} \quad \ldots\ldots \quad \text{III.}$$

Такъ какъ въ этомъ случаѣ $EB<Q$, то

$$EF\leqslant EB<Q,\quad AF<AE+Q.$$

Изъ послѣдняго неравенства пріемами, вполнѣ аналогичными тѣмъ, посредствомъ которыхъ мы во 2-омъ случаѣ нашли соотношеніе II′, мы обнаружимъ, что

$$\frac{m_p}{p}-\frac{m_n}{n}<\frac{1}{n}\;\cdots\cdots\;\text{III}'.$$

Соотношенія I, II и II′, III и III′ обнаруживаютъ, что абсолютная величина разности

$$S_p-S_n=\frac{m_p}{p}-\frac{m_n}{n}$$

всегда меньше нежели $\frac{1}{n}$.

Такъ какъ $p>n$, то мы положимъ $p=n+h$ и формулируемъ предыдущій результатъ такъ:

При всѣхъ значеніяхъ чиселъ n и h разность $S_{n+h}-S_n$ меньше нежели $\frac{1}{n}$, а потому стремится къ нулю, когда n неопредѣленно возрастаетъ.

Извѣстно, что это соотношеніе представляетъ собой условіе, необходимое и достаточное для того, чтобы члены ряда

$$S_1,\ S_2,\ S_3\ \ldots\ S_n\ \ldots\ (3)$$

стремились къ опредѣленному предѣлу, когда n неопредѣленно возрастаетъ.

Опредѣленіе 1. *Предѣлъ, къ которому стремятся члены ряда (3), называется отношеніемъ отрѣзка AB къ CD и обозначается символомъ $\frac{AB}{CD}$.*

§ 4. Установивъ понятіе объ отношеніи двухъ отрѣзковъ, мы обнаружимъ важнѣйшія его свойства.

Теорема I. Положимъ, что мы имѣемъ два отрѣзка AB и CD. Положимъ далѣе, что мы будемъ составлять приближенныя значенія отношенія $\frac{AB}{CD}$ съ точностью до

$$\frac{1}{n},\ \frac{1}{n_1},\ \frac{1}{n_2}\ \ldots\ldots,$$

гдѣ числа n, n_1, n_2 . . . . составляютъ неопредѣленно возрастающій рядъ. Эти приближенныя значенія образуютъ рядъ

$$S_n,\ S_{n_1},\ S_{n_2}\ \ldots\ldots\ (4).$$

Члены этого ряда стремятся къ предѣлу, который равенъ отношенію отрѣзковъ $\frac{AB}{CD}$.

Иными словами, если мы вычислимъ приближенное значеніе отношенія отрѣзковъ съ точностью до $^1/_n$ и затѣмъ станемъ повторять ту же операцію, увеличивая неопредѣленно число n, — то

приближенныя значенія будутъ стремиться къ предѣлу, равному отношенію двухъ отрѣзковъ, какому бы закону мы ни слѣдовали, увеличивая число n.

Доказательство. Члены ряда (4) фигурируютъ въ ряду (3) и слѣдуютъ другъ за другомъ въ этомъ ряду въ томъ же порядкѣ, въ какомъ они расположены въ ряду (3). Извѣстно, что если мы изъ безконечнаго ряда чиселъ, члены котораго стремятся къ опредѣленному предѣлу, выдѣлимъ безконечный рядъ чиселъ, входящихъ въ составъ перваго ряда, и если эти числа будутъ слѣдовать другъ за другомъ во второмъ ряду въ томъ же порядкѣ, въ какомъ они расположены въ первомъ ряду, то члены второго ряда стремятся къ тому же предѣлу, къ которому приближаются члены перваго ряда; а такъ какъ члены ряда (3) приближаются къ предѣлу, равному отношенію $\frac{AB}{CD}$, то къ тому же предѣлу стремятся и члены ряда (4).

Теорема II. *Отношеніе двухъ отрѣзковъ никогда не равно нулю.*

Доказательство. Положимъ, что мы имѣемъ отношеніе отрѣзковъ $\frac{AB}{CD}$. Выберемъ число n такъ, чтобы n-ая (Q) часть отрѣзка CD была меньше AB. (Пред. 6). (Если $AB > CD$, то n можно положить равнымъ единицѣ). Тогда число m_n, выражающее, сколько разъ отрѣзокъ Q содержится въ отрѣзкѣ AB, не меньше единицы, и слѣдовательно, число $S_n = \frac{m_n}{n}$, больше нуля. Составимъ теперь рядъ

$$S_n,\ S_{n^2},\ S_{n^3}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (5).$$

Члены этого ряда стремятся къ предѣлу, равному отношенію $\frac{AB}{CD}$ [теор. 1]. Первый членъ этого ряда больше нуля. Поэтому, если намъ удастся доказать, что члены этого ряда не убываютъ, то мы тѣмъ самымъ обнаружимъ, что предѣлъ, къ которому эти члены стремятся, также больше нуля.

Обозначимъ n^k черезъ ν и разсмотримъ два послѣдовательныхъ члена ряда (5) S_ν и $S_{\nu n}$. Мы знаемъ, что

$$S_\nu = \frac{m_\nu}{\nu},\quad S_{\nu n} = \frac{m_{\nu n}}{\nu n}.$$

Если мы обозначимъ ν-ую часть отрѣзка CD черезъ Q, n-ую часть отрѣзка Q черезъ q, то q, согласно закону сочетательному, представляетъ собою νn-ую часть отрѣзка CD. Поэтому отрѣзокъ q содержится въ отрѣзкѣ AB по крайней мѣрѣ nm_ν разъ. Иными словами, $m_{\nu n} \geqq m_\nu . n$, т. е.

$$S_{\nu n} \geqq \frac{m_\nu . n}{\nu . n},\quad S_{\nu n} \geqq S_\nu,$$

что и требовалось доказать

Теорема III. *Если отрѣзки AB и CD имѣютъ общую мѣру Q, которая содержится m разъ въ отрѣзкѣ AB и n разъ въ отрѣзкѣ CD, то* $\frac{AB}{CD} = \frac{m}{n}$.

Доказательство. Покажемъ, что въ этомъ случаѣ S_{kn} при всякомъ цѣломъ значенiи k равно $\frac{m}{n}$. Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ, что, дѣля отрѣзокъ CD на n равныхъ частей, мы получаемъ отрѣзокъ Q,—а дѣля отрѣзокъ Q на k частей, мы получаемъ отрѣзокъ R. Согласно закону сочетательному (предл. 2) и въ виду однозначности процесса дѣленiя отрѣзка на равныя части (предл. 4) мы отсюда заключаемъ, что отрѣзокъ R составляетъ kn-тую часть отрѣзка CD. Такъ какъ съ другой стороны отрѣзокъ AB состоитъ изъ m отрѣзковъ равныхъ Q, а этотъ послѣднiй, въ свою очередь, состоитъ изъ k отрѣзковъ равныхъ R, то въ силу того же сочетательнаго закона отрѣзокъ R содержится въ отрѣзкѣ AB mk разъ. Отсюда вытекаетъ, что

$$m_{kn} = mk,\ S_{kn} = \frac{m}{n}.$$

Итакъ, при наличныхъ условiяхъ всѣ члены ряда (5) равны $\frac{m}{n}$, а потому то-же значенiе имѣетъ и отношенiе $\frac{AB}{CD}$.

Теорема IV. *Если отрѣзокъ AB и $A'B'$ конгруэнтны, то*

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{CD}.$$

Доказательство. Это вытекаетъ изъ того обстоятельства, что всякiй отрѣзокъ Q содержится въ конгруэнтныхъ отрѣзкахъ AB и $A'B'$ одинаковое число разъ. Поэтому отношенiя $\frac{AB}{CD}$ и $\frac{A'B'}{CD}$ опредѣляются однимъ и тѣмъ же рядомъ.

Теорема V. *Если отрѣзокъ AB состоитъ изъ отрѣзковъ AE и EB, то*

$$\frac{AB}{CD} = \frac{AE}{CD} + \frac{EB}{CD}.$$

Доказательство. Приближенныя значенiя отношенiй $\frac{AB}{CD}$, $\frac{AE}{CD}$ и $\frac{EB}{CD}$ съ точностью до $\frac{1}{n}$ мы обозначимъ черезъ S_n, S'_n и S''_n.

Мы обозначимъ n-ую часть отрѣзка CD черезъ Q и предположимъ, что отрѣзокъ Q содержится въ отрѣзкѣ AE m'_n разъ, а въ отрѣзкѣ BE m''_n разъ. Будемъ теперь откладывать отрѣзокъ Q на отрѣзокъ AE, начиная отъ точки A, и положимъ, что повторивъ эту операцiю m'_n разъ, мы дойдемъ до точки F (фиг. 2).

Фиг. 2.

Точка F либо совпадаетъ съ E, либо лежитъ до нея, между A и E. Такимъ же образомъ будемъ откладывать отрѣзокъ Q на отрѣзкѣ BE, начиная отъ точки B. Положимъ также, что повторивъ эту операцiю m''_n разъ, мы дойдемъ до точки G, которая либо совпадаетъ съ E, либо лежитъ до нея, между B и E. Такъ какъ каждый изъ отрѣзковъ EF и EG меньше Q, то отрѣзокъ FG

меньше $2Q$. Поэтому отрѣзокъ Q содержится въ AB либо $m'_n+m''_n$ разъ, либо $m'_n+m''_n+1$ разъ, смотря по тому, будетъ ли $FG<Q$ или $FG\geqslant Q$. Отсюда слѣдуетъ, что

$$S_n=\frac{m'_n+m''_n+\varepsilon}{n}=S'_n+S''_n+\frac{\varepsilon}{n},$$

гдѣ ε равно либо нулю, либо единицѣ. Отсюда слѣдуетъ, что

$$\lim S_n=\lim S'_n+\lim S''_n,$$

иными словами

$$\frac{AB}{CD}=\frac{AE}{CD}+\frac{EB}{CD}.$$

Теорема VI. *Если отрѣзокъ AA состоитъ изъ ряда отрѣзковъ* AA_1, A_1A_2, A_2A_3 . . . . $A_{n-1}A_n$, то

$$\frac{AA_n}{CD}=\frac{AA_1}{CD}+\frac{A_1A_2}{CD}+\frac{A_2A_3}{CD}+\cdots\cdots+\frac{A_{n-1}A_n}{CD}.$$

Доказательство ведется индуктивно. Предположимъ, что теорема справедлива, когда отрѣзокъ состоитъ изъ $n-1$ составляющихъ отрѣзковъ. Докажемъ, что она остается справедливою и въ томъ случаѣ, когда отрѣзокъ состоитъ изъ n составляющихъ отрѣзковъ.

Соединяя первые $n-1$ отрѣзковъ въ одинъ отрѣзокъ AA_{n-1}, мы можемъ утверждать въ силу закона сочетательнаго, что

$$AA_n=AA_{n-1}+A_{n-1}A_n.$$

Слѣдовательно, въ силу предыдущей теоремы

$$\frac{AA_n}{CD}=\frac{AA_{n-1}}{CD}+\frac{A_{n-1}A_n}{CD}.$$

Въ виду сдѣланнаго допущенія

$$\frac{AA_{n-1}}{CD}=\frac{AA_1}{CD}+\frac{A_1A_2}{CD}+\frac{A_2A_3}{CD}+\cdots\cdots+\frac{A_{n-2}A_{n-1}}{CD}.$$

Подставляя это въ предыдущее равенство, мы получимъ:

$$\frac{AA_n}{CD}=\frac{AA_1}{CD}+\frac{A_1A_2}{CD}+\cdots\cdots+\frac{A_{n-1}A_n}{CD},$$

что и требовалось доказать.

Мы предлагаемъ читателю доказать теоремы, выражаемыя слѣдующими равенствами:

$$1)\ \frac{AB}{CD}=1:\frac{CD}{AB}.\quad 2)\ \frac{AB}{CD}:\frac{A'B'}{CD}=\frac{AB}{A'B'}.$$

$$3)\ \text{Если}\ \frac{AB}{CD}=\frac{A'B'}{C'D'},\ \text{то}\ \frac{AB}{A'B'}=\frac{CD}{C'D'}.$$

Мы ихъ не доказываемъ, такъ какъ намъ здѣсь не приходится ими пользоваться.

§ 5. Согласимся теперь относить къ каждому прямолинейному отрѣзку нѣкоторое число. Именно, распорядимся слѣдующимъ образомъ. Выбравъ произвольно отрѣзокъ CD, отнесемъ къ нему число 1. Ко всякому же другому отрѣзку отнесемъ то

число, которое выражаетъ его отношеніе къ отрѣзку CD. Въ силу теоремъ IV, VI и II мы можемъ высказать слѣдующія утвержденія относительно чиселъ, отнесенныхъ къ различнымъ отрѣзкамъ:

a) Конгруэнтнымъ отрѣзкамъ всегда отвѣчаетъ одно и то-же число.

b) Число, отнесенное къ отрѣзку, состоящему изъ нѣсколькихъ меньшихъ отрѣзковъ, равно суммѣ чиселъ, отвѣчающихъ составляющимъ отрѣзкамъ.

c) Никакому отрѣзку не отвѣчаетъ число нуль.

Докажемъ теперь, что указанное соотвѣтствіе между ариѳметическими числами и прямолинейными отрѣзками можетъ быть произведено только однимъ способомъ, если числа, отвѣчающія различнымъ отрѣзкамъ, должны обладать свойствами a), b), c), и если произведенъ выборъ того отрѣзка, къ которому мы относимъ число 1.

Дѣйствительно, положимъ, что мы отнесли къ отрѣзку CD число 1. Пусть n-тая часть отрѣзка CD будетъ Q. Тогда отрѣзку Q должно соотвѣтствовать число $\frac{1}{n}$, ибо это должно быть такое число, которое, будучи повторено n разъ, даетъ 1. (Свойство b).

Далѣе ясно, что въ силу свойствъ b) и c) бо́льшему отрѣзку отвѣчаетъ и бо́льшее число. Раздѣлимъ теперь отрѣзокъ CD на n равныхъ частей и допустимъ, что n-ая его часть Q содержится въ отрѣзкѣ AB m_n разъ. Если мы отложимъ отрѣзокъ Q m_n разъ на отрѣзкѣ AB, начиная отъ точки A, то дойдемъ до нѣкоторой точки C, совпадающей съ точкой B или лежащей до нея. Во всякомъ случаѣ $AB \geqq AC$. Если же мы отъ точки C отложимъ отрѣзокъ Q еще одинъ разъ, то дойдемъ до точки D, лежащей уже на продолженіи отрѣзка AB. Поэтому $AD > AB$. Положимъ теперь, что къ отрѣзку AB отнесено число x. Такъ какъ отрѣзкамъ AC и AD, согласно свойству b), должны отвѣчать $\frac{m_n}{n}$ и $\frac{m_n+1}{n}$, то

$$\frac{m_n}{n} \leqq x < \frac{m_n+1}{n}.$$

Иными словами, если мы напишемъ два ряда чиселъ

$$\frac{m_1}{1}, \frac{m_2}{2}, \frac{m_3}{3} \ldots\ldots$$

$$\frac{m_1+1}{1}, \frac{m_2+1}{2}, \frac{m_3+1}{3} \ldots\ldots,$$

то число x должно заключаться между каждымъ членомъ перваго ряда и соотвѣтствующими членами второго ряда. Но такъ какъ разность между членомъ перваго ряда и соотвѣтствующимъ членомъ второго ряда съ возрастаніемъ указателя стремится къ

нулю, и члены перваго ряда стремятся къ опредѣленному предѣлу, то къ тому же предѣлу стремятся и члены второго ряда, и x есть значеніе этого предѣла. Такъ какъ съ другой стороны предѣлъ, къ которому стремятся члены перваго ряда, есть не что иное, какъ $\frac{AB}{CD}$, то $x = \frac{AB}{CD}$, что и требовалось доказать.

Итакъ, къ каждому прямолинейному отрѣзку можетъ быть отнесено одно и только одно ариѳметическое число такъ, чтобы опредѣленному отрѣзку отвѣчало число 1, чтобы двумъ конгруэнтнымъ отрѣзкамъ отвѣчало всегда одно и то же число, — чтобы отрѣзку, составленному изъ нѣсколькихъ отрѣзковъ, отвѣчало число, равное суммѣ тѣхъ чиселъ, которыя соотвѣтствуютъ составляющимъ отрѣзкамъ.

Опредѣленіе. *Если сопряженіе, удовлетворяющее названнымъ выше требованіямъ, установлено, то отрѣзокъ CD называютъ единицею длины, а число, отвѣчающее всякому другому отрѣзку AB, называютъ длиной этого отрѣзка, отнесенной къ этому отрѣзку, какъ къ единицѣ длины.*

ТЕМА ДЛЯ СОТРУДНИКОВЪ.

Новая замѣчательная точка треугольника.

Въ 1-ой тетради журнала „Archiv f. die Mathematik und Physik“ за текущій годъ г. А. Цвойдзинскій помѣстилъ небольшую статью, которая содержитъ рядъ интересныхъ теоремъ, касающихся новой указанной имъ замѣчательной точки треугольника. Вотъ въ чемъ заключаются эти теоремы.

Теорема 1. Если изъ вершинъ треугольника ABC опустимъ перпендикуляры Aa, Bb, Cc на произвольную прямую L, лежащую въ плоскости треугольника, а изъ основаній a, b, c этихъ перпендикуляровъ вновь опустимъ перпендикуляры на стороны BC, CA и AB,—то послѣдніе пересѣкутся въ одной точкѣ.

Эту точку г. Цвойдзинскій называетъ „Lotpunkt des Dreiecks in Bezug auf Gerade“. Затрудняясь переводомъ этого и дальнѣйшихъ терминовъ, мы будемъ называть эту точку (согласно обычаю, установившемуся въ Новой геометріи треугольника, *точкой Цвойдзинскаго для треугольника ABC относительно прямой L.*

Ортоцентръ (точка пересѣченія высотъ) треугольника есть точка Цвойдзинскаго для этого треугольника относительно каждой изъ сторонъ.

Теорема 2. Если прямая L проходитъ черезъ центръ круга O, описаннаго около треугольника, и вращается вокругъ него (т. е. вокругъ центра O), то точка Цвойдзинскаго описываетъ окружность Фейербаха (т. е. окружность, проходящую черезъ основанія высотъ треугольника).

Теорема 3. Точка Цвойдзинскаго въ треугольникѣ ABC относительно прямой, соединяющей центръ описанной около этого треугольника окружности и центръ одной изъ внѣвписанныхъ окружностей, совпадаетъ съ точкой касанія этой внѣвписанной окружности съ окружностью Фейербаха.

Теорема 4. Теорема 1-ая допускаетъ слѣдующее обобщеніе: если точки a', b' и c' дѣлятъ отрѣзки Aa, Bb, Cc на пропорціональныя части, т. е. если

$$Aa' : Aa = Bb' : Bb = Cc' : Cc = \mu$$

и изъ точекъ a', b' и c' опустимъ перпендикуляры на стороны BC, CA и AB, то послѣдніе пересѣкутся въ одной точкѣ.

Эту точку мы будемъ называть *точкой Цвойдзинскаго относительно прямой L, соотвѣтствующей отношенію μ.*

Эту прямую мы будемъ называть прямой Цвойдзинскаго для даннаго четырехсторонника.

Частный случай, который мы разсмотрѣли выше, отвѣчаетъ значенію $\mu = 1$.

Теорема 5. Геометрическое мѣсто точекъ Цвойдзинскаго, которыя при одномъ и томъ же треугольникѣ ABC и одной той же прямой L отвѣчаютъ всѣмъ возможнымъ значеніямъ отношенія μ, есть прямая линія.

Эту прямую мы будемъ называть прямой Цвойдзинскаго для треугольника ABC относительно прямой L.

Четыре прямыя, изъ которыхъ никакія три не проходятъ черезъ одну точку, образуютъ полный четырехсторонникъ. Каждыя три стороны полнаго четырехсторонника образуютъ треугольникъ, которому отвѣчаетъ четвертая сторона четырехсторонника.

Теорема 6. Четыре треугольника полнаго четырехсторонника имѣютъ — каждый относительно соотвѣтствующей ему четвертой стороны—одну и ту же прямую Цвойдзинскаго.

Эту прямую мы будемъ называть прямой Цвойдзинскаго этого четырехсторонника.

Теорема 7. Ортоцентры четырехъ треугольниковъ полнаго четырехсторонника лежатъ на одной прямой — на прямой Цвойдзинскаго этого четырехсторонника.

Всѣ эти предложенія доказаны г. Цвойдзинскимъ аналитически. Мы предлагаемъ нашимъ сотрудникамъ дать геометрическое доказательство этихъ предложеній. Если мы получимъ простое и изящное доказательство, то не только напечатаемъ его въ нашемъ журналѣ, но переведемъ его на нѣмецкій языкъ и отошлемъ въ „Archiv“.

Срокъ работы 6 мѣсяцевъ. Иными словами статьи для напечатанія должны быть присланы въ редакцію не позже 15-го іюня 1901 г.

Новѣйшіе успѣхи въ области телеграфированія безъ проводовъ.

Докладъ, читанный профессоромъ Шарлоттенбургскаго Политехникума **A. Slaby**, на XLII съѣздѣ нѣмецкихъ инженеровъ въ Килѣ. *)

Переводъ Д. Шора.

Всякое непосредственное взаимодѣйствіе между живыми существами, находящимися въ различныхъ мѣстахъ, является для нашего воображенія чѣмъ то весьма заманчивымъ; и человѣчество издавна мечтало освободиться отъ пространственныхъ рамокъ. Народныя повѣрья приписываютъ отдѣльнымъ лицамъ способность узнавать о томъ, что происходитъ въ отдаленныхъ мѣстностяхъ; особенно поразительные въ этомъ отношеніи разсказы доходятъ до насъ съ Востока. Когда во время англо-афганской войны посылали самыхъ быстрыхъ всадниковъ для передачи приказаній въ отряды, отдаленные на 50 миль, то посланные часто прибывали слишкомъ поздно: туземцамъ было уже все извѣстно и они успѣвали принять свои мѣры. О смерти генерала Гордона въ Каирѣ узнали въ тотъ же день, не смотря на то что телеграфная линія была прервана. Не менѣе интересенъ слѣдующій фактъ, сообщенный однимъ путешественникомъ объ индѣйскомъ племени, живущемъ при рѣкѣ Амазонкѣ; этотъ фактъ, правда, не столь чудесенъ. Въ хижинѣ предводителя этого племени путешественникъ видѣлъ на половину зарытый въ землю инструментъ, удары о который передавались въ другую отдаленную хижину и такимъ образомъ служили сигналами. Вѣроятно жила руды или подземный источникъ передавали въ этомъ случаѣ звукъ.

Не менѣе поразительными казались однако и первые опыты *Marconi*, хотя телеграфированіе безъ проводовъ не представляло собой чего либо совершенно новаго. *Tesla*, *Edison* и *Preece* уже много лѣтъ тому назадъ изобрѣли приборы для осуществленія этой задачи; *Edison'y* удалось даже придумать аппаратъ для телеграфированія съ желѣзнодорожнаго поѣзда, находящагося въ движеніи. Точно также и *дальнодѣйствующая сила электрической искры*, которою воспользовался *Marconi*, не была въ наукѣ чѣмъ-либо новымъ; уже болѣе ста лѣтъ тому назадъ она предстала предъ взоромъ изслѣдователя; на нее только не обратили должнаго вниманія и не поняли ея дѣйствительнаго значенія. По преданіямъ мы обязаны открытіемъ этого явленія женщинѣ. Вотъ какъ гласитъ это преданіе: жена *Galvani* помогала своему мужу препарировать нервы бедра лягушки: онъ самъ работалъ въ это время. въ нѣкоторомъ отдаленіи надъ электрической машиной и производилъ электрическія искры; жена *Galvani* къ своему удив-

---

*) Профессоръ *A. Slaby* принадлежитъ къ числу наиболѣе выдающихся изслѣдователей телеграфированія безъ проводовъ.

леній замѣтила, что каждый разъ, какъ она прикасалась ножемъ къ нерву лягушки, въ то время какъ въ машинѣ возникала искра, бедро лягушки приходило въ движеніе. Такъ что между нею и ея мужемъ, производившимъ искры, установилась таинственная электрическая связь, переносившая дѣйствіе на разстояніе — *родъ телеграфа безъ проводовъ.*

Но это наблюденіе осталось безплоднымъ; упрямый ученый хотѣлъ во что бы то ни стало объяснить это явленіе таинственными животными силами. Отсюда возникла знаменитая полемика, которая вскорѣ перешла къ другому вопросу, именно къ вопросу объ электризаціи при соприкосновеніи; и тогда болѣе великій умъ, чѣмъ *Galvani*—*Alessandro Volta*—закончилъ споръ открытіемъ электрическаго тока, открытіемъ быть можетъ самымъ блестящимъ въ естествознаніи. Почти черезъ сто лѣтъ наука снова возвращается къ первоначальному явленію; нѣмецкій изслѣдователь *Heinrich Hertz*, даетъ объясненіе таинственнаго взаимодѣйствія возникновеніемъ электрическихъ волнъ; наконецъ молодой соотечественникъ *Galvani*—*Guglielmo Marconi*—примѣняетъ, послѣ нѣсколькихъ лѣтъ безпрерывной работы, открытіе *Hertz'a* къ техникѣ; онъ шлетъ на разстояніе въ сто километровъ телеграммы черезъ воздухъ.

Сенсація, произведенная этими опытами, лучше всего иллюстрируется паденіемъ курса акцій англійскихъ телеграфныхъ обществъ. Человѣкъ привыкаетъ чрезвычайно легко къ примѣненію новыхъ, неизвѣстныхъ прежде силъ природы. То, что казалось намъ всего нѣсколько лѣтъ назадъ чудомъ, является въ настоящее время само собой понятнымъ и яснымъ. Я намѣренно говорю, что человѣкъ „привыкаетъ", такъ какъ о „пониманіи", въ дѣйствительномъ смыслѣ этого слова, къ сожалѣнію, почти не можетъ быть еще рѣчи во всемъ отдѣлѣ электричества. Чѣмъ скорѣе можемъ мы ввести новый фактъ въ кругъ нашихъ обычныхъ представленій, тѣмъ легче совершается процессъ умственной ассимиляціи, называемой „пониманіемъ". Что же касается телеграфированія безъ проводовъ, то тому, кто могъ опираться лишь на факты, извѣстные ему еще со школьной скамьи, приходилось бороться съ большими трудностями, чтобы понять это новое завоеваніе человѣческаго ума. Для этого необходимо было прежде всего оріентироваться въ новомъ мірѣ электрическихъ волнъ. Въ первое время казалось совершенно невозможнымъ объяснить дальнодѣйствіе электрической искры, не прибѣгая къ представленію объ электрическихъ лучахъ въ томъ смыслѣ, какъ оно введено *Maxwell'емъ*. А между тѣмъ такое представленіе — только *гипотеза*, какъ и многія другія основныя положенія физики. Въ настоящее время, когда мы лучше разбираемся въ законахъ дѣйствія электрической искры, мы въ состояніи свести его объясненіе и къ болѣе старымъ представленіямъ. А именно къ общеизвѣстнымъ явленіямъ *индукціи*.

Если расположить два проводника, такъ чтобы они на достаточно большомъ протяженіи были параллельны другъ другу,

и пропустить по одному изъ нихъ токъ, то при извѣстныхъ условіяхъ можно возбудить токъ во второмъ проводникѣ, не прибѣгая непосредственно къ электрической силѣ. Для этого достаточно измѣнить силу „первичнаго тока", т. е. тока, идущаго по первому проводнику; во второмъ проводникѣ немедленно возникаетъ „вторичный токъ", который, правда, исчезаетъ очень быстро. Увеличивая силу первичнаго тока, мы получаемъ вторичный токъ противоположнаго ему направленія; наоборотъ, уменьшая ее мы получаемъ токъ того же направленія. Такъ какъ проводники вполнѣ отдѣлены другъ отъ друга, то не можетъ быть сомнѣнія, что электрическое явленіе передается въ данномъ случаѣ черезъ воздухъ отъ перваго проводника ко второму. Это явленіе становится особенно интереснымъ, если періодически прерывать или мѣнять первичный токъ. А именно, во второмъ проводникѣ возникаетъ продолжительный перемѣнный токъ, періодъ котораго совпадаетъ съ періодомъ первичнаго. Источникомъ процесса служитъ первый проводникъ; второй же является такъ сказать лишь электрическимъ рефлекторомъ, отражающимъ намъ явленія, происходящія въ первомъ проводникѣ.

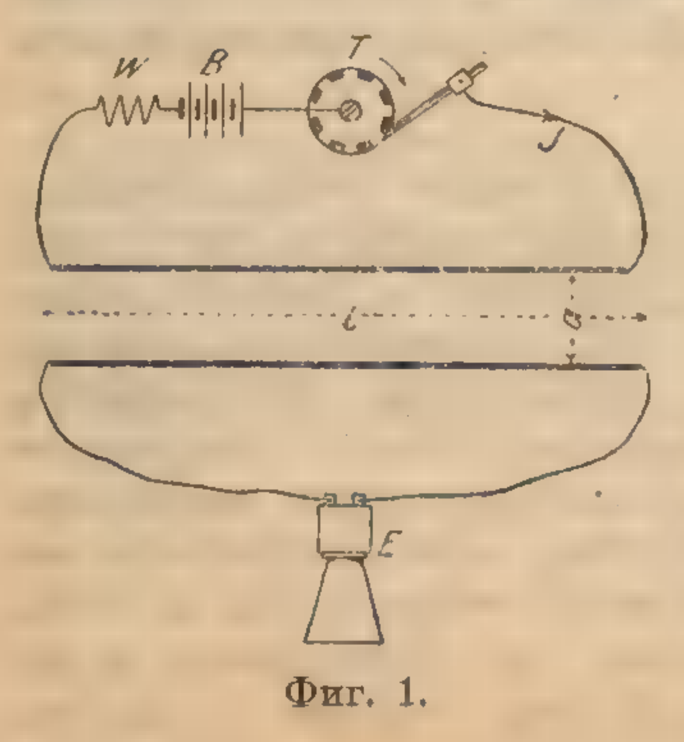
Постоянный электрическій токъ не воздѣйствуетъ на наши органы чувствъ. Если даже такимъ токомъ проносятся по проволокѣ тысячи лошадиныхъ силъ, то всетаки вся эта геркулесовская работа электрическихъ силъ остается отъ насъ сокрытой, мы не въ состояніи воспринять ее непосредственно. Приведемъ аналогію: пока вода течетъ по трубѣ, на внѣшней поверхности трубы ничто не обнаруживаетъ ея движенія; и не смотря на это мы можемъ такимъ образомъ передавать гигантскія силы. Но какъ только мы мѣняемъ скорость теченія, ставя на его пути какое-либо препятствіе, какъ напр., закрывая клапанъ, картина мгновенно мѣняется! Сильный толчекъ потрясаетъ трубу, такъ что она подчасъ и лопается. Если же предположить, что вода мѣняетъ нѣсколько разъ въ секунду направленіе теченія, то періодическія сотрясенія трубы будутъ передаваться окружающему воздуху; и мы услышимъ звукъ опредѣленной высоты. По сотрясеніямъ нашей барабанной перепонки мы узнаемъ о томъ, что происходитъ внутри трубы; намъ извѣстно, что эти сотрясенія передаются при посредствѣ колебаній воздуха, находящагося между нашимъ ухомъ и трубою.

Подобнымъ же образомъ можно представить себѣ передачу электрическаго сотрясенія. Только воздухъ не играетъ при этомъ никакой роли, такъ какъ это явленіе происходитъ такъ же хорошо и въ безвоздушномъ пространствѣ. Но современное механическое міропониманіе заклятый врагъ объясненій, основанныхъ на возможности передачи силъ на разстояніи безъ посредства вещественной матеріи; поэтому *изобрѣли* особый родъ вещества, *міровой эѳиръ*, который, хотя и не дѣйствуетъ непосредственно на наши чувства, но въ состояніи передавать электрическія колебанія. Подобно тому, какъ волны, возникшія на поверхности воды при паденіи камня, расходятся кругами во всѣ стороны,—подобно

тому, какъ тихое дрожаніе струны скрипки ритмическими колебаніями достигаетъ нашего уха, подобно этому расходятся электрическія колебанія въ эѳирѣ.

Но на эти объясненія слѣдуетъ смотрѣть только какъ на средства, дающія ограниченному человѣческому уму возможность разобраться въ запутанныхъ проявленіяхъ природы; — какъ на средство, облегчающее распредѣленіе нашихъ знаній по различнымъ полкамъ и ящикамъ нашего умственнаго хозяйства. Ученый подобенъ, слѣдовательно, ребенку, собирающему на берегу моря красивыя раковины и распредѣляющему ихъ по величинѣ и цвѣту. Но намъ дарована свыше способность познавать законы, управляющіе вселенной, и умѣнье творчески примѣнять эти законы для блага человѣчества. Эта дѣятельность объединяетъ ученаго и инженера въ плодотворномъ союзѣ.

Разсмотримъ теперь съ этой точки зрѣнія тѣ новыя явленія, которыя въ концѣ столѣтія сдѣлались зрѣлымъ достояніемъ человѣчества. Открытіемъ законовъ электрической индукціи мы обязаны величайшему естествоиспытателю прошлаго столѣтія — *Faraday'ю*. *Faraday* и его послѣдователи показали, что силы, вызываемыя путемъ индукціи электрическаго тока въ проводникѣ, вполнѣ отдѣленномъ отъ того, по которому онъ течетъ, тѣмъ интенсивнѣе, чѣмъ длиннѣе проводы (предполагается, что они расположены по возможности параллельно), чѣмъ сильнѣе въ среднемъ первичный токъ и чѣмъ чаще онъ мѣняется. При прочихъ равныхъ условіяхъ, сила наведеннаго тока уменьшается по мѣрѣ увеличенія разстоянія между проводами. Это уменьшеніе пропорціонально разстоянію, а не квадрату его, какъ то имѣетъ мѣсто при распространеніи силъ отъ электрическаго центра. Пусть l обозначаетъ длину параллельныхъ проводовъ, a—разстояніе между ними, J—среднюю силу первичнаго тока и наконецъ T — продолжительность періодическихъ колебаній $\left(\text{такъ что } \frac{1}{T} \text{ будетъ обозначать число ихъ въ единицу времени}\right)$; тогда электрическое напряженіе во второй проволокѣ будетъ пропорціонально выраженію $\frac{l^2J}{aT}$.



Фиг. 1.

Слѣдующій простой опытъ убѣдитъ насъ въ вѣрности этого закона. На фиг. 1 изображены двѣ проволоки, протянутыя одна надъ другою. Верхняя составляетъ часть замкнутой цѣпи, въ которой при помощи батареи B возбуждается токъ; силу его мы можемъ регулировать введеннымъ въ цѣпь сопротивленіемъ W; вращающійся коммутаторъ T даетъ возможность прерывать токъ, отчего получаются перемѣнные токи J. Нижняя прово-

лока точно также замкнута, но здѣсь въ цѣпь введенъ только телефонъ E, при помощи котораго мы обнаруживаемъ вторичный токъ. Именно если вертѣть коммутаторъ достаточно скоро, то въ телефонѣ возникаютъ тоны, которые можно слышать на большомъ разстояніи. Чѣмъ скорѣе вращать коммутаторъ, тѣмъ сильнѣе и выше становятся звуки. Увеличивая разстояніе a параллельныхъ проволокъ, мы тѣмъ самымъ ослабляемъ силу звука; точно также сила звука замѣтно уменьшается, если сократить длину l параллельныхъ проводовъ. Уменьшая сопротивленіе W, мы усиливаемъ токъ, а вмѣстѣ съ тѣмъ возрастаетъ сила звука.

Въ этомъ состоятъ основные законы, на которыхъ основывается телеграфированіе безъ проводовъ. У читателя можетъ возникнуть вопросъ: почему же въ такомъ случаѣ не примѣнили телеграфированія безъ проводовъ на большія разстоянія еще во времена *Faraday'a?* Причина этого въ настоящее время ясна. Хотя уже давно нашли, что чѣмъ больше протяженіе, на которомъ проволоки параллельны другъ другу, тѣмъ больше разстояніе, на которое возможна передача; но это было только помѣхой при проведеніи длинныхъ телефонныхъ линій, параллельно телеграфнымъ. Это явленіе изучено подробно сэромъ *Wiliam'омъ Preece.* Между Durham'омъ и Darlington'омъ, проведены на протяженіи 26 km. двѣ параллельныхъ телеграфныхъ линіи, отдаленныя другъ отъ друга на разстояніе въ 16 km. *Preece* показалъ, что при помощи телефона можно было слышать въ одной изъ линій телеграммы, посылаемыя по способу Морзе по другой линіи. Основываясь на этомъ принципѣ, онъ построилъ систему для телеграфированія безъ проводовъ; онъ устроилъ на ближайшихъ къ берегу островахъ при помощи параллельныхъ проводовъ станціи, существующія отчасти до сихъ поръ. Но необходимыя для этой системы длинныя параллельныя проводы даютъ возможность примѣнять ее лишь въ нѣкоторыхъ особенно благопріятныхъ условіяхъ; кромѣ того телеграммы могутъ передаваться только на небольшія разстоянія. Для телеграфированія съ корабля на корабль эта система не примѣнима, равно какъ и для телеграфированія между берегомъ и кораблемъ.

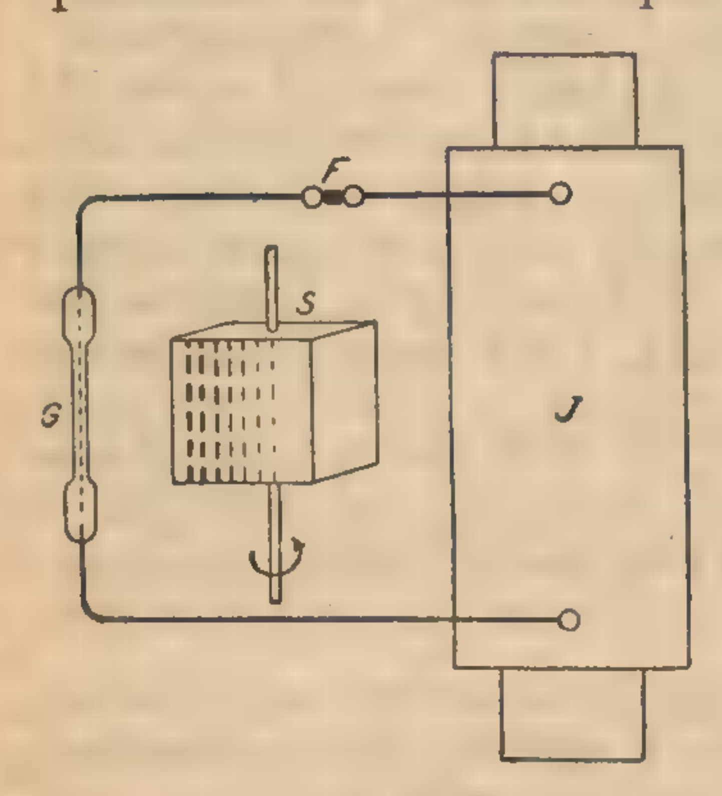
Силу тока до сихъ поръ не удалось увеличить значительно; поэтому сообразно приведенной формулѣ, чтобы было возможно телеграфировать на большія разстоянія, остается только одно средство: увеличить число колебаній въ секунду. Увеличить же число колебаній въ секунду оказалось дѣйствительно возможнымъ, и возможнымъ въ такихъ размѣрахъ, которые далеко превзошли всякія ожиданія; это открытіе, одно изъ самыхъ блестящихъ за послѣднее десятилѣтіе, принадлежитъ *Heinrich'y Hertz'y.* Чтобы дать предварительно понятіе о громадномъ шагѣ впередъ, который былъ сдѣланъ этимъ открытіемъ, прежде упомянемъ, что когда мы пользовались исключительно чисто механическими способами, мы могли воспроизводить колебанія, число которыхъ въ секунду не превышало нѣсколькихъ сотенъ; въ настоящее же время, пользуясь новыми средствами, мы можемъ производить

перемѣнные токи, дающіе милліоны колебаній въ секунду. Разстояніе, на которомъ мы еще въ состояніи передавать колебанія, увеличено такимъ образомъ въ 10000 разъ.

Но какими остроумными приспособленіями должна быть снабжена машина, дающая такое громадное увеличеніе числа колебаній, что мы не въ состояніи ихъ сосчитать!

Когда, въ послѣдніе годы жизни *Faraday'a*, одна дама спросила его, что такое въ сущности электричество, то онъ отвѣтилъ: „Сорокъ лѣтъ тому назадъ я думалъ, что могу отвѣтить на этотъ вопросъ; теперь же я не въ состояніи этого сдѣлать". Что-жъ сказалъ бы *Faraday*, если бы ему были извѣстны всѣ дѣйствія этой чудной машины: этой машины, выходящей безъ участія человѣка непосредственно изъ мастерской природы? Эта машина была уже въ рукахъ человѣка въ эпоху, когда ученіе объ электричествѣ еще переживало свои младенческіе годы; человѣкъ не умѣлъ только ею владѣть, не зналъ ея употребленія? Этотъ интересный механизмъ заключается въ электрической *искрѣ*, открывшей человѣчеству свое поразительное дѣйствіе въ загадочномъ опытѣ жены *Galvani*.

Обыкновенно говорятъ, что электрическая искра представляетъ собою мгновенное сліяніе зарядовъ противоположнаго электричества. Это сліяніе происходитъ дѣйствительно въ видѣ электрическаго тока; но было бы ошибочно думать, что обмѣнъ электричествъ происходитъ только одинъ разъ. Чтобы составить себѣ болѣе или менѣе вѣрную картину того, что здѣсь происходитъ, можно сравнить соединяющіеся электрическіе заряды съ огромнымъ множествомъ упругихъ шаровъ, которые съ головокружительной быстротой несутся отъ одной стѣны къ другой и отражаются отъ нея обратно. Но огромная скорость этого колебательнаго обмѣна электричества непостижима и не поддается никакому сравненію съ механическими явленіями. Скорость движенія пушечнаго ядра совершенно незначительна по сравненію съ ураганомъ колеблющихся электрическихъ частичекъ, которыя проскакиваютъ въ искрѣ туда и обратно много милліоновъ разъ въ секунду.



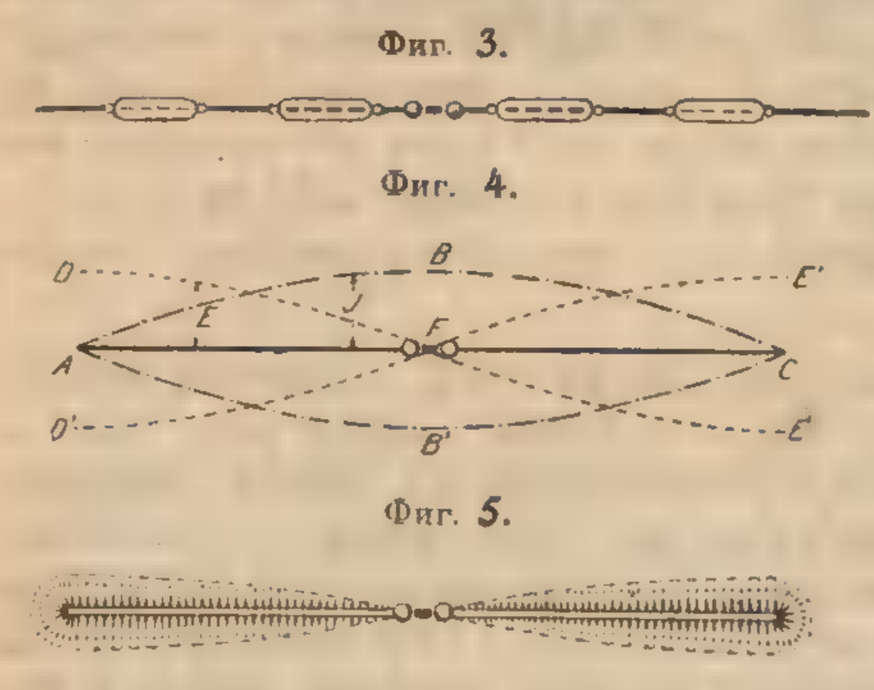
Фиг. 2.

И несмотря на это, если примѣнить всѣ средства для уменьшенія скорости, можно разложить этотъ ураганъ на отдѣльныя его фазы. Для этого проведемъ перемѣнный токъ, полученный отъ искры T (см. фиг. 2), черезъ трубку G, изъ которой выкаченъ воздухъ; какъ извѣстно, трубка станетъ свѣтиться. Если разсматривать теперь отраженіе трубки G во вращающемся зер-

калѣ S, то получается сперва впечатлѣніе широкой свѣтящейся ленты; если же къ ней присмотрѣться, то не трудно замѣтить, что она состоитъ изъ ряда параллельныхъ полосъ, ширина и яркость которыхъ постепенно убываетъ. Это происходитъ отъ того, что разрядъ, вызванный искрой, прерывается и колеблется изъ стороны въ сторону.

Это явленіе можно сравнить съ колебаніемъ скрипичной струны или съ вибрирующимъ движеніемъ спущенной тетивы самострѣла; послѣ прекращенія натяженія нѣкоторое время происходитъ дрожащее движеніе, прежде чѣмъ устанавливается равновѣсіе. Совершенно такъ же происходитъ колебательный разрядъ, когда между двумя заряженными электричествомъ кондукторами проскакиваетъ искра.

Но быстро колеблющіеся токи электрической искры обладаютъ кромѣ того еще однимъ замѣчательнымъ свойствомъ; если бы намъ разсказали о немъ 30 лѣтъ тому назадъ, мы сочли бы его невозможнымъ и противорѣчащимъ основамъ ученія объ электричествѣ. Въ тѣ времена полагали, что электрическіе токи могутъ имѣть мѣсто только въ *замкнутыхъ* проводникахъ. Этотъ законъ справедливъ и теперь по отношенію къ постоянному току; но пульсирующіе токи электрической искры ему не подчиняются; они могутъ происходить и въ *незамкнутыхъ* проводникахъ, больше того—въ послѣднихъ они обладаютъ особенно рѣзко выраженною способностью индукціи. Никакими философствованіями мы не дошли бы до открытія этого факта, тогда какъ простой опытъ показываетъ намъ его вполнѣ ясно *). При помощи румкорфовой катушки я заряжаю два шарообразныхъ металлическихъ кондуктора, такъ что между ними проскакиваетъ нѣкоторое время искра (того же можно достигнуть при помощи машины тренія или электрофорной машины).



Фиг. 3.

Фиг. 4.

Фиг. 5.

Къ каждому изъ кондукторовъ примыкаетъ по проволокѣ, которыя натянуты прямолинейно и укрѣплены другими концами у стѣнъ залы, но изолированы отъ послѣднихъ. Въ эти проволоки я ввелъ нѣсколько обыкновенныхъ лампочекъ накаливанія, проволоки которыхъ прямолинейны (см. фиг. 3); вспыхиваніе этихъ лампочекъ доказываетъ, что черезъ нихъ проходитъ токъ. Отъ обоихъ проводниковъ, между которыми происходитъ разрядъ,

*) Это утвержденіе представляется намъ поспѣшнымъ. Именно въ ученіи объ электричествѣ и въ частности въ томъ рядѣ фактовъ, которые авторъ излагаетъ весьма многое было достигнуто путемъ чистой дедукціи. *Ред.*

токъ какъ бы устремляется въ обѣ проволоки, но на ихъ концахъ отражается, течетъ обратно, и то же самое повторяется милліоны разъ въ секунду.

Не трудно замѣтить, что лампочки, находящіяся вблизи искры, свѣтятся ярче остальныхъ. Вводя въ проволоку въ различныхъ пунктахъ измѣрительные инструменты, мы получаемъ даже возможность измѣрять токи. При этомъ обнаруживается слѣдующій фактъ: сила электрическаго тока не одинакова во всѣхъ мѣстахъ проволоки. Отклоненія амперметра вблизи того мѣста, гдѣ проскакиваетъ искра, будутъ значительно больше, чѣмъ у концовъ проволоки. Если мы станемъ откладывать на перпендикулярахъ къ различнымъ точкамъ проволоки отрѣзки, пропорціональные наибольшимъ значеніямъ силы тока въ этой точкѣ, то вершины этихъ перпендикуляровъ дадутъ правильно закругленное возвышеніе *ABC* синусоидальной линіи (см. фиг 4). На концахъ проволокъ, т. е. въ мѣстахъ отраженія, сила тока падаетъ до нуля. Въ мѣстѣ, гдѣ проскакиваетъ искра, т. е. тамъ гдѣ раскаленные газы и пары металловъ соединяютъ обѣ проволоки, токъ достигаетъ своего наибольшаго значенія.

Описываемое явленіе имѣетъ еще одну особенность. Въ каждомъ мѣстѣ проволоки, въ каждый моментъ электричество обладаетъ опредѣленнымъ напряженіемъ *); но это напряженіе колеблется милліоны разъ въ секунду между наибольшимъ положительнымъ и наибольшимъ отрицательнымъ значеніемъ, подобно тому какъ это происходитъ съ силою тока. При этомъ напряженіе принимаетъ значенія, обратныя тѣмъ, которыя имѣетъ въ томъ же мѣстѣ сила тока: больше всего величина напряженія колеблется у свободныхъ концовъ проволокъ (*DD'* и *EE'* на фиг. 4); вблизи же мѣста, гдѣ проскакиваетъ искра оно принимаетъ небольшія значенія.

Показать экспериментально справедливость вышесказаннаго не такъ легко, какъ это можно было сдѣлать, когда рѣчь шла о силѣ тока. Если бы можно было достигнуть въ этомъ залѣ совершенной темноты, то мы увидѣли бы, что концы проволокъ свѣтятся. Это свѣченіе происходитъ не отъ того, что по проволокѣ течетъ токъ, а отъ того, что на концахъ ея электричество достигаетъ извѣстнаго напряженія. Но мы можемъ точно и болѣе объективно доказать справедливость вышеприведеннаго положенія; мы воспользуемся для этой цѣли сухой фотографической пластинкой, на которую, какъ извѣстно, дѣйствуетъ прикосновеніе тѣлъ, обладающихъ электрическимъ напряженіемъ. При проявленіи такой пластинки получаются на ней лучеобразныя фигуры съ тонкими и рѣдкими развѣтвленіями. Нѣсколько лѣтъ тому назадъ русскій изслѣдователь по фамиліи *Іодко* обнародовалъ лучеобразныя фотографіи, которыя мы получаемъ, накладывая руку на сухую фотографическую пластинку; эти фотографіи

*) т. е. опредѣленнымъ потенціаломъ.

обратили на себя всеобщее вниманіе. Можно было ясно видѣть форму руки на пластинкѣ, а отъ нея, въ особенности отъ концовъ пальцевъ, во всѣ стороны расходились странные перистые рисунки. Спириты увидѣли въ этомъ, конечно, проявленіе сверхестественныхъ силъ, но нелѣпость этого была скоро остроумно доказана д-ромъ *Jacobsen'омъ.* Онъ показывалъ фотографіи рукъ, снабженныя удивительными излученіями, и только, когда одушевленіе публики достигло апогея, онъ открылъ тайну приготовленія этихъ фотографій: онъ сложилъ теплыя сосиски такъ, что онѣ образовали форму, подобную рукѣ, и наложилъ ихъ на пластинку. Такимъ образомъ оказывается, что фигуры *Іодко* происходятъ благодаря теплотѣ человѣческой руки.—Но дѣйствіе наэлектризованныхъ тѣлъ на сухую фотографическую пластинку остается тѣмъ не менѣе неоспоримымъ. Непродожительное экспонированіе свѣточувствительной ленты, которую я приложилъ къ проволокѣ по всей ея длинѣ, ясно показало, что электрическое напряженіе увеличивается по направленію къ свободнымъ концамъ проволокъ (см. фиг. 5); болѣе точные опыты доказываютъ даже, что напряженіе увеличивается пропорціонально синусу разстоянія отъ мѣста, гдѣ проскакиваетъ искра.

(Продолженіе слѣдуетъ).

Объ измѣненіи оси вращенія земли. *)

Недавно еще въ нашемъ журналѣ, въ статьѣ *Wiener'a* **) былъ приведенъ рядъ примѣровъ того, до какой поразительной точности доходятъ измѣренія современной физики. Въ настоящей замѣткѣ рѣчь идетъ объ одномъ результатѣ столь же изумительно точныхъ астрономическихъ измѣреній, а именно—объ открытіи перемѣщеній полюса по земной поверхности. Для инструментовъ и для методовъ наблюденія прежняго времени земная ось занимала въ массѣ земного шара неизмѣнное положеніе, оба полюса лежали въ опредѣленныхъ неизмѣнныхъ точкахъ земной поверхности. Правда давно уже было извѣстно, что земная ось описываетъ въ пространствѣ конусообразную поверхность, вслѣдствіе чего возникаетъ такъ называемое „предвареніе равноденствій" или „прецессія"; но при этомъ земная ось остается неподвижной по отношенію къ самому земному шару: земля вращается вмѣстѣ съ осью. Точно также при движеніи, носящемъ названіе „нутаціи", земля совершаетъ тѣ же движенія, что и ось. Другими словами отъ этихъ движеній мѣняются полюсы міра, т. е. тѣ точки не-

---

*) Данныя и рисунокъ, приведенные здѣсь взяты нами изъ статей помѣщенныхъ въ журналѣ „Himmel und Erde" (VIII. Jahrgang, 1896, S. 287—316; X. Jahrgang, 1898, S. 562—565; XIII. Jahrgang, 1901, S. 280—283).

**) „Расширеніе нашихъ чувствъ"; №№ 303, 304 и 305 „Вѣстника".

беснаго свода, которыя во время суточнаго движенія земли остаются неподвижными; но при этомъ высота этихъ полюсовъ надъ горизонтомъ нѣкотораго опредѣленнаго мѣста остается неизмѣнной. Положеніе полюсовъ на самомъ земномъ шарѣ остается неизмѣннымъ.

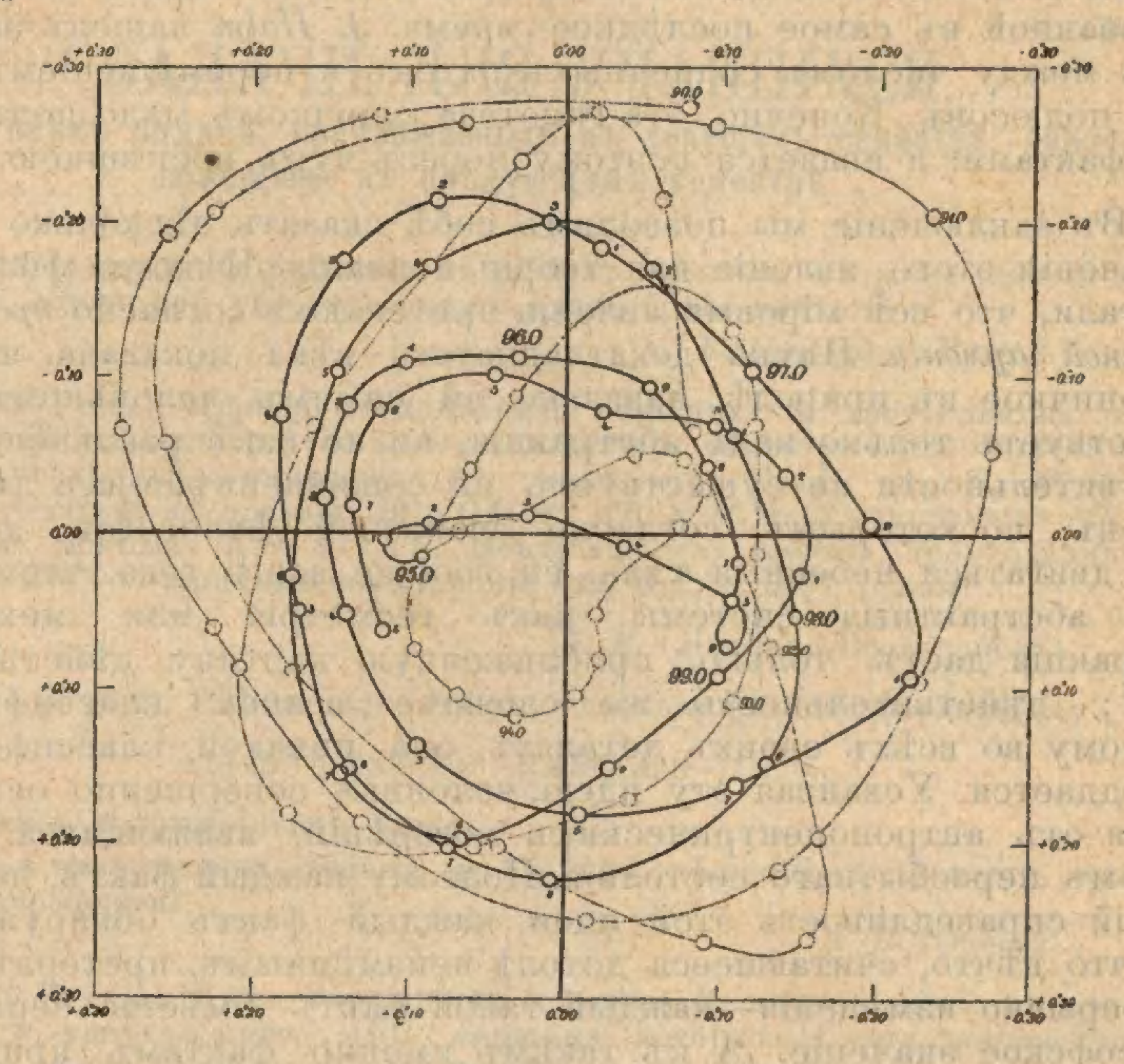
Перемѣщеніе оси, о которомъ мы говоримъ, совсѣмъ иного характера, нежели прецессія и нутація. При этомъ движеніи мѣняется та линія въ земной массѣ, вокругъ которой происходитъ вращеніе; полюсы земли перемѣщаются по земной поверхности, а слѣдовательно мѣняется высота полюса міра надъ горизонтомъ опредѣленнаго мѣста. Другими словами отъ этого движенія мѣняется географическая широта мѣста.

Впервые замѣтилъ это измѣненіе широты *Bessel* въ 1844 году. Но его наблюденія ждали почти полъ вѣка подтвержденія. Въ началѣ 80-тыхъ годовъ, когда изъ громаднаго матеріала, добытаго наблюденіями географическихъ широтъ, можно было заключить, что земные полюсы колеблются, на конференціи въ Римѣ сдѣлано было предложеніе совмѣстно производить въ различныхъ обсерваторіяхъ изслѣдованія этого вопроса. Но только черезъ нѣсколько лѣтъ стали появляться работы, подтвердившія фактъ измѣненія широтъ, и въ 1888 году составилась кооперація обсерваторій Берлинской, Потсдамской, Страсбургской и Пражской, которая рѣшающимъ образомъ подтвердила прежнія наблюденія. По результатамъ, обнародованнымъ этой коопераціей, земной полюсъ колеблется въ годъ приблизительно на 0,5″—0,6″. Въ то же время наблюденія Пулковской обсерваторіи подтвердили этотъ результатъ.

Тогда возникъ вопросъ: есть ли названное измѣненіе широты результатъ движенія всей земной оси или какого либо другого движенія сѣвернаго полюса? Не происходятъ ли въ сѣверномъ полушаріи перемѣщенія почвы, земной коры, вызывающія измѣненія положенія полюса на земномъ шарѣ? Для разрѣшенія этого сомнѣнія была отправлена въ 1891 году экспедиція для наблюденія широты въ Гонолулу; это мѣсто по долготѣ отстоитъ отъ Берлина на 180°, и лежитъ на 30° южнѣе. Наблюденія, производившіяся здѣсь въ теченіе цѣлаго года, показали, что южный полюсъ колеблется почти вполнѣ симметрично съ сѣвернымъ. Такимъ образомъ было доказано, что измѣненія, о которыхъ мы говоримъ, являются слѣдствіемъ перемѣщенія земной оси.

Еще въ 1759 году *Euler* въ своемъ трактатѣ по теоріи вращательнаго движенія вывелъ, что земная ось должна колебаться вокругъ оси наибольшаго момента инерціи (т. е. вокругъ наименьшей оси земного эллипсоида). Земной полюсъ долженъ былъ бы описывать на поверхности земли въ 306 дней окружность вокругъ нѣкотораго средняго положенія. Но наблюденія показали, что во-первыхъ, движеніе полюса происходитъ не по кругу, а во-вторыхъ, періодъ его больше 400 дней. Изъ приведеннаго здѣсь чертежа можно составить себѣ вѣрное представленіе

о дѣйствительномъ характерѣ этого движенія. Онъ составленъ на основаніи наблюденій, производившихся въ теченіи послѣдняго десятилѣтія (съ начала 1890 года до конца 1899) въ обсерваторіяхъ Казани, Токіо, Пулкова, Праги, Потсдама, Ліона, Нью-Іорка, Филадельфіи, Вашингтона, Варшавы, Неаполя, Вѣны, Карльсруэ и др.—Кривая, изображенная на этомъ чертежѣ, представляетъ собою путь описываемый сѣвернымъ полюсомъ вокругъ нѣкотораго средняго положенія. Кружки, лежащіе на пути этой кривой, обозначаютъ точки, въ которыхъ полюсъ находился



въ началѣ каждаго года и черезъ каждую десятую долю года, что обозначено соотвѣтствующими цифрами около этихъ кружковъ. Цифры, расположенныя по сторонамъ квадрата, обозначаютъ въ секундахъ величину отклоненія сѣвернаго полюса отъ средняго значенія; онѣ показываютъ, между прочимъ, что наибольшая амплитуда этого неправильнаго колебательнаго движенія доходитъ почти до 0,6″. (Траэкторія полюса до 95-го года нанесена пунктиромъ).

Для дальнѣйшихъ наблюденій интересующаго насъ явленія выбранъ въ настоящее время рядъ обсерваторій, лежащихъ приблизительно на одной и той же широтѣ (39°8′ сѣв. шир.), что устраняетъ возможность постоянныхъ ошибокъ. Результаты этихъ наблюденій будутъ обрабатываться въ Интернаціональномъ Бюро для Землеизмѣренія въ Потсдамѣ.

Что касается причины перемѣщеній земной оси или вѣрнѣе—причины отклоненія этихъ перемѣщеній отъ пути, даваемаго

теоріей *Euler'a*, то въ настоящее время не существуетъ въ наукѣ на этотъ счетъ ничего опредѣленнаго. Несомнѣнно только, что всевозможныя геологическія, равно какъ и метеорологическія измѣненія играютъ при этомъ роль. Въ различныя времена года въ разныхъ мѣстахъ земли скопляются различныя массы: такъ зимою у полюса скопляется ледъ—и т. п. Прежде, когда земля еще не совершенно отвердѣла, вліяніе геологическихъ измѣненій играло громадную роль. Отсюда ясно видно все значеніе этого вопроса для космогоніи.—Упомянемъ еще объ одной гипотезѣ, высказанной въ самое послѣднее время. *J. Halm* нашелъ зависимость между числомъ солнечныхъ пятенъ и перемѣщеніемъ земныхъ полюсовъ. Конечно, эта гипотеза слишкомъ мало подтверждена фактами, и является поэтому черезъ-чуръ поспѣшною.

Въ заключеніе мы позволимъ себѣ сказать нѣсколько словъ о значеніи этого явленія для теоріи познанія. Нѣкогда философы полагали, что всѣ міровыя явленія протекаютъ согласно *предустановленной гармоніи*. Наука девятнадцатаго вѣка показала, что все гармоничное въ природѣ навязано ей самимъ человѣкомъ, оно существуетъ только какъ абстракція, но не какъ реальность. Въ дѣйствительности не существуетъ ни совершеннѣйшихъ линій—круговъ, по которымъ, согласно греческой философіи, должны были двигаться небесныя тѣла, ни вообще всего того, что даютъ намъ абстрактныя системы, какъ геометрія или механика. Абстракція даетъ только приближенную картину дѣйствительности; дѣйствительность же сложнѣе всякой классификаціи и потому во всѣхъ своихъ деталяхъ она никакой классификаціи не поддается. Усваивая эту идею, человѣкъ совершенно освобождается отъ антропоцентрическихъ воззрѣній, являющихся пережиткомъ первобытнаго состоянія. Поэтому каждый фактъ, доказывающій справедливость этой идеи, каждый фактъ обнаруживающій, что нѣчто, считавшееся дотолѣ неизмѣннымъ, претерпѣваетъ безпрерывно измѣненія—каждый такой фактъ имѣетъ серьезное философское значеніе. А къ такимъ именно фактамъ принадлежитъ и изложенное выше явленіе.

Д. Шоръ (Одесса).

ЗАДАЧИ.

XXXII. Условимся подъ жизненнымъ опытомъ какого-нибудь возраста подразумѣвать произведеніе изъ числа, указывающаго возрастъ, на число лицъ, достигшихъ этого возраста. Предположимъ, что составивъ таблицу жизненныхъ опытовъ для различныхъ возрастовъ, мы замѣчаемъ, что нѣкоторому опредѣленному возрасту (напр., 50-ти годамъ) отвѣчаетъ наибольшій жизненный опытъ, а остальнымъ возрастамъ отвѣчаютъ меньшіе жизненные опыты. Измѣнимъ теперь опредѣленіе жизненнаго опыта, а именно будемъ подъ жизненнымъ опытомъ возраста t подразумѣвать выраженіе

$$(t-\alpha) . n \qquad (1),$$

гдѣ n есть число лицъ, достигшихъ возраста t, а α—нѣкоторый опредѣленный

возрастъ (напр. 16 лѣтъ). Доказать, что возрастъ, которому отвѣчаетъ максимальный жизненный опытъ, при новомъ опредѣленіи этого понятія (см. (1)), окажется болѣе старымъ, чѣмъ возрастъ максимальнаго жизненнаго опыта, усматриваемый изъ первоначальной таблицы *).

М. Ихтейманъ (Одесса).

XXXIII. Показать, что степени изогональныхъ точекъ **) треугольника относительно описаннаго круга пропорціональны произведеніямъ разстояній этихъ точекъ отъ сторонъ треугольника.

Д. Е. (Иваново-Вознесенскъ).

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 112 (4 сер.). Опредѣлить въ цѣлыхъ числахъ стороны такого треугольника, одинъ изъ угловъ котораго вдвое болѣе другого.

Е. Григорьевъ (Казань).

№ 113 (4 сер.). Прямая, соединяющая вершину A треугольника ABC съ нѣкоторой лежащей въ его плоскости точкою M, встрѣчаетъ описанную около треугольника окружность въ точкѣ A'. Пусть A_1, B_1, C_1 суть проэкціи точки M на прямыя BC, CA и AB, а B'' и C'' — проэкціи той же точки M на прямыя $A'B$ и $A'C$. Показать, что высоты треугольниковъ $A_1B_1C_1$ и $MB''C''$, опущенныя на стороны ихъ B_1C_1 и $B''C''$, равны.

Д. Е. (Иваново-Вознесенскъ).

№ 114 (4 сер.). Найти цѣлое число, удовлетворяющее неравенству

$$x^4+2x^3-(2A-1)x^2-2Ax+A(A-1)<0,$$

гдѣ A—данное положительное число.

Всегда ли возможна задача, и сколько рѣшеній допускаетъ она въ случаѣ возможности?

Н. С. (Одесса).

№ 115 (4 сер.). Дана окружность и точка H внутри нея; вписать въ этотъ кругъ треугольникъ ABC, вершина котораго A есть данная точка окружности и для котораго H есть центръ круга вписаннаго.

Изъ *Supplemento al Periodico di matematica.*

№ 116 (4 сер.). Доказать, что

$$(a+b+c)^2 < 9(a^2+b^2+c^2),$$

гдѣ a, b и c—нѣкоторыя положительныя числа.

Изъ *Journal de Mathématiques élémentaires.*

№ 117 (4 сер.). Тѣло, вѣсомъ въ 50 граммовъ, падая съ начальной скоростью въ 200 метровъ въ секунду, въ концѣ паденія обладаетъ живой силой въ 1550,675 джоулей. Опредѣлить высоту паденія, зная, что ускореніе силы тяжести $g=9{,}81$ м.

(Заимств.) *М. Гербановскій* (Владиміръ).

---

*) Терминологія и содержаніе задачи заимствованы изъ книги г. Майра „Закономѣрность въ общественной жизни". (Москва 1899), [см. стран. 177].

**) См. № 236 „Вѣстника", „Новая геометрія треугольника", §§ 8 и 9, стр. 200 и 201.

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 44 (4 сер.). *Пусть O—центръ круга описаннаго, H—ортоцентръ треугольника ABC; на прямыхъ AB и BC откладываютъ соотвѣтственно отрѣзки AD=AH и AE=AO; доказать, что отрѣзокъ DE равенъ радіусу круга описаннаго.*

Опишемъ около треугольника окружность и черезъ вершину C проведемъ діаметръ CF этой окружности. Соединимъ точку B прямыми съ точками F, O и H. Прямыя AH и BF, будучи обѣ перпендикулярны къ прямой BC, параллельны. Подобнымъ же образомъ можно убѣдиться въ параллельности прямыхъ AF и BH. Поэтому $BF=AH=AD$. Кромѣ того, $\angle BFC=\angle BAC$ *) и $FO=AE=AO$. Слѣдовательно треугольникъ BOF равенъ треугольнику DEA, откуда $DE=OB$, т. е. отрѣзокъ DE равенъ радіусу круга описаннаго.

Если уголъ A треугольника ABC оказывается тупымъ или прямымъ, то предложенная для доказательства теорема остается справедливой, если только отрѣзки AD и AE условиться откладывать на прямыхъ AB и AC отъ точки A лишь въ такихъ направленіяхъ, чтобы образуемый этими отрѣзками уголъ, меньшій 180^0, былъ не тупымъ.

П. Полушкинъ (Знаменка); *Б. Мерцаловъ* (Орелъ); *М. Поповъ* (Асхабадъ).

— **№ 45** (4 сер.). *Въ сосудъ высотой въ 2 метра, наполненный водой при 4^0, опускаютъ безъ начальной скорости твердое тѣло, которое черезъ $1^1/_2$ секунды достигаетъ дна сосуда. Опредѣлить плотность твердаго тѣла. Треніе не принимается въ разсчетъ.*

Обозначимъ плотность тѣла черезъ x, массу его черезъ m, объемъ черезъ v, ускореніе силы тяжести въ мѣстѣ производства опыта черезъ g. Тогда вѣсъ тѣла въ пустотѣ выражается черезъ vx граммовъ, а вѣсъ его въ водѣ—черезъ $vx-v$ граммовъ. Такимъ образомъ тѣло, погруженное въ воду, падаетъ подъ вліяніемъ силы въ $(vx-v)g$ динъ. Назвавъ ускореніе, съ которымъ двигается тѣло подъ вліяніемъ этой постоянной силы черезъ j, найдемъ:

$$mj=vxj=(vx-v)g,$$

откуда

$$j=\frac{(x-1)g}{x} \qquad (1).$$

Подъ вліяніемъ силы въ $(vx-v)g$ динъ тѣло двигается равноускоренно съ ускореніемъ j и, согласно съ условіемъ задачи, проходитъ за $\frac{3}{2}$ секунды 200 сантиметровъ. Слѣдовательно

$$200=\frac{j}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2,$$

или (см. (1))

$$200=\frac{9(x-1)g}{8x},$$

откуда

$$x=\frac{9g}{9g-1600} \qquad (2).$$

Полагая $g=980$см., находимъ изъ формулы (2) съ точностью до $\frac{1}{100}$ значеніе x —

$$x=1,22.$$

П. Грицынъ (ст. Цымлянская); *Н. С.* (Одесса); *Д. Дьяковъ* (Новочеркасскъ).

*) Уголъ A треугольника ABC предполагается острымъ.

Редакторы: **В. А. Циммерманъ** и **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено цензурою, Одесса, 12-го Ноября 1901 г.
Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, Ямская, д. № 64.